

Introducción a la teoría del Procesamiento Digital de Señales (DSP) de Audio

eMe - Escuela Universitaria de Música

Curso 2011

Transformada de Fourier

Pregunta 1

1. Calcule la DFT de largo $N = 8$ de las siguientes secuencias:

a) $x_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ (impulso)

b) $x_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ (impulso retardado)

c) $x_3 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ (DC)

d) $x_4 = [2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

2. Bosqueje gráficas de módulo y fase de las DFT obtenidas.

3. Expresé $X_4[k]$ en términos de $X_1[k]$ y $X_2[k]$, siendo $X_i[k]$ el bin k -ésimo de la DFT de la señal $x_i[n]$.

Pregunta 2

Dada una señal $x[n]$, con $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, considere las siguientes definiciones de la DFT directa e inversa,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

y demuestre las siguientes propiedades de la DFT.

1. LINEALIDAD

Si $x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]$ y $y[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} Y[k]$, considerando a y b dos números reales, entonces se cumple,

$$a x[n] + b y[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} a X[k] + b Y[k]$$

2. CORRIMIENTO

Si se considera un corrimiento en el tiempo de s muestras de la señal $x[n]$, se cumple,

$$x[n-s] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k] e^{-j2\pi sk/N}$$

¿A qué corresponde entonces el corrimiento en el tiempo en términos del espectro? ¿Se modifica la magnitud? ¿Y la fase?

3. CONVOLUCION

Considerando la definición de convolución entre dos señales $x[n]$ e $y[n]$,

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m]$$

se cumple,

$$x[n] * y[n] = X[k] Y[k],$$

es decir, la convolución en el tiempo corresponde al producto en frecuencia.

4. REVERSO / CONJUGADO

Si $x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]$, al considerar el reverso de la señal $x[-n]$ se cumple,

$$x[-n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X^*[k]$$

donde $X^*[k]$ es el conjugado de $X[k]$.

Pregunta 3

Al calcular una DFT de 128 puntos a partir de un cierta señal aparece un pico en el índice $k = 32$. ¿Cuál es la frecuencia del pico expresada como fracción de la frecuencia de muestreo? ¿Cuál es la frecuencia de muestreo si el pico corresponde a 1250 Hz en la señal analógica?

Pregunta 4

Considere una señal compuesta por dos sinusoides. Se desea saber cual es la mínima diferencia en frecuencia y amplitud entre las sinusoides de modo de que puedan resolverse sin dificultad.

1. Calcule la mínima diferencia en frecuencia tal que los lóbulos principales no se solapen (como se muestra en la Figura 1), para las diferentes ventanas del Cuadro 1.
2. Calcule la diferencia de amplitud para que la amplitud del componente más débil coincida con la amplitud del primer lóbulo secundario del componente de mayor amplitud (como se muestra en la Figura 1), para las diferentes ventanas del Cuadro 1.
3. Suponga que los componentes tienen frecuencias $f_1 = 0,25$ y $f_2 = 0,29$. ¿Qué ventana(s) permitiría(n) que los lóbulos principales no se solapen?

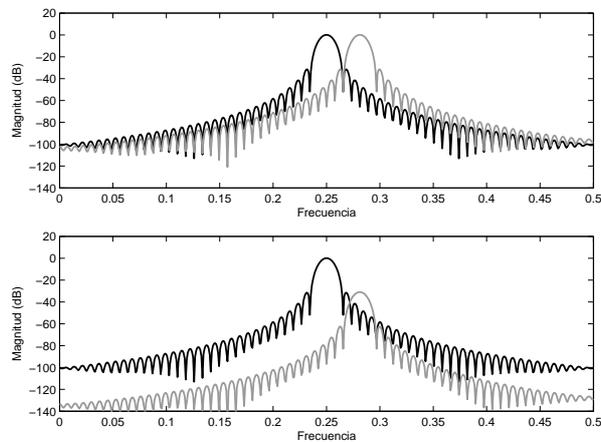


Figura 1: Arriba: Mínima diferencia en frecuencia tal que los lóbulos principales de dos componentes sinusoidales no se solapan. Abajo: Diferencia de amplitud entre dos componentes sinusoidales tal que el más débil iguala al primer lóbulo secundario del componente de mayor amplitud.

4. Si las amplitudes de los componentes son $a_1 = 1$ y $a_2 = 0,02$, ¿Qué ventana(s) permitiría(n) que el componente más débil supere al menos en 3dB al lóbulo secundario del componente de mayor amplitud? ¿Se puede cumplir este requerimiento para alguna ventana sin que los lóbulos principales se solapen (con las frecuencias del punto anterior)?

	Ancho lóbulo principal (aproximado)	Amplitud 1er lóbulo secundario (dB)
Rectangular	$4\pi/(N + 1)$	-13
Hann	$8\pi/N$	-31
Hamming	$8\pi/N$	-41
Blackman	$12\pi/N$	-57

Cuadro 1: Ancho del lóbulo principal y amplitud del primer lóbulo secundario.

Pregunta 5

Considere la señal de voz cantada del archivo `ohwhere22050.wav`, disponible en la página del curso. Usando un editor de audio (e.g. Wavesurfer) determine largo y tipo de ventana, así como largo de la FFT (i.e. cantidad de ceros), de modo de poder resolver su estructura armónica. Repita lo mismo para visualizar las formantes manteniendo la mejor resolución temporal posible.