Introducción a la Teoría del Procesamiento Digital de Señales de Audio

Transformada de Fourier

Resumen

el análisis de Fourier es un conjunto de técnicas matemáticas basadas en descomponer una señal en sinusoides

la Transformada de Fourier Discreta (DFT) es la herramienta utilizada cuando se trabaja con señales discretas

en la práctica la DFT se calcua en forma eficiente mediante la Transformada de Fourier Rápida (FFT)

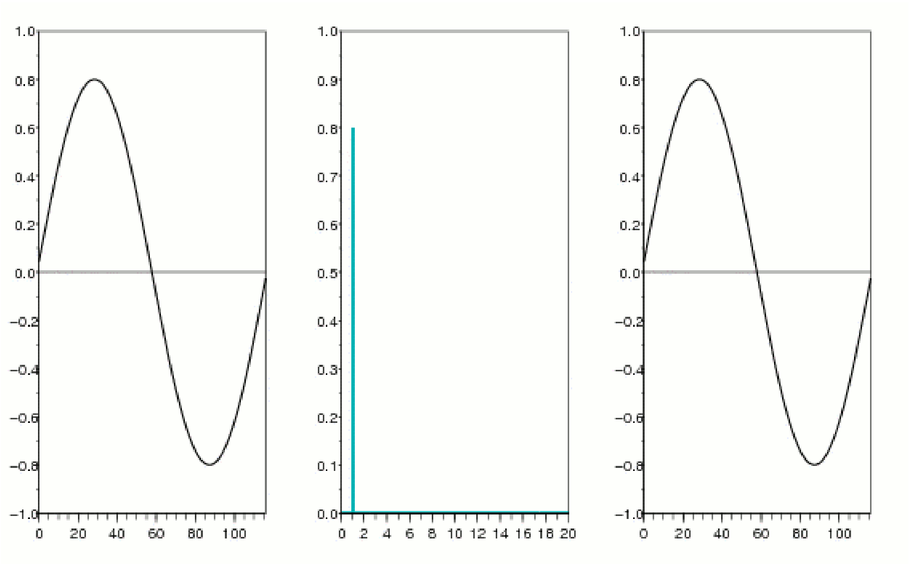
tiene diversas aplicaciones en DSP tales como:

análisis espectral, convolución rápida, síntesis de sonido por modelado espectral, compresión de audio, filtrado, etc.

Análisis de Fourier

Fourier estudia la propagación del calor a principios de 1800, y plantea el uso de series trigonométricas para representar funciones periódicas.

Presenta un artículo con la controversial afirmación de que **cualquier señal continua periódica puede representarse como suma de sinusoides adecuadamente elegidas**.



Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768 - 1830)

Análisis de Fourier

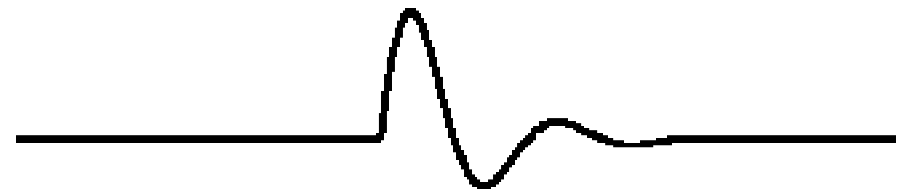
Motivación de la descomposición en sinusoides:

La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) a una onda sinusoidal es también una onda sinusoidal de **igual frecuencia**, si bien puede tener **distinta amplitud y fase**.
El Análisis de Fourier junto al principio de superposición permiten caracterizar la respuesta en frecuencia de un sistema LTI.

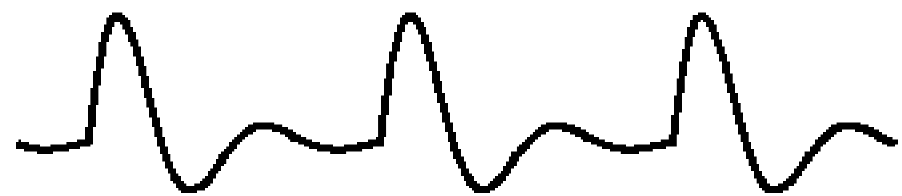
Análisis de Fourier

Tipo de Transformada | **Señal de ejemplo**

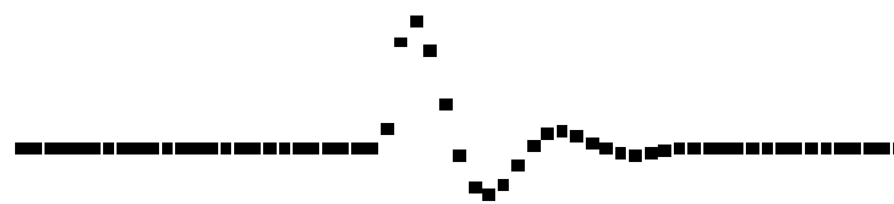
Transformada de Fourier
señales continuas y no periódicas



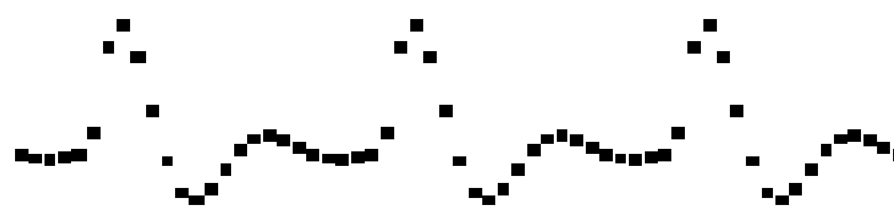
Series de Fourier
señales continuas y periódicas



Transformada de Fourier
de tiempo discreto
señales discretas y no periódicas



Transformada de Fourier Discreta
señales discretas y periódicas

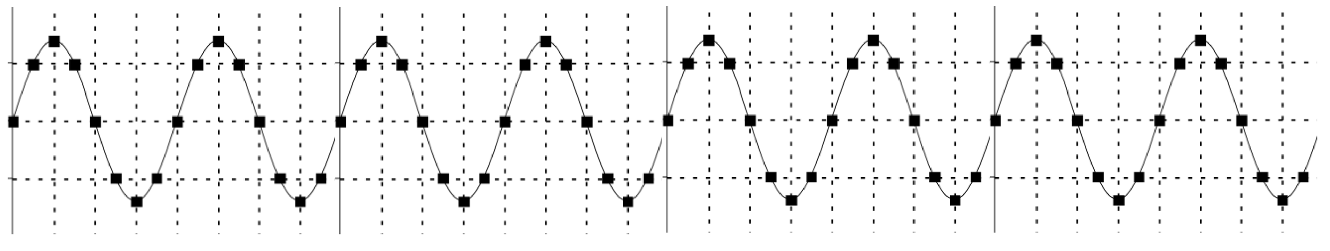


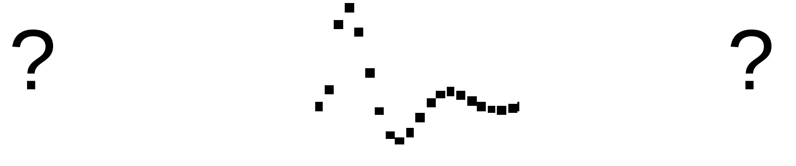
Análisis de Fourier

Las sinusoides (seno, coseno) están definidas desde menos infinito a más infinito (-∞ a +∞)

¿Cómo analizamos un conjunto de muestras finito?

No es posible usar un conjunto de señales infinitas para sintetizar una señal de duración finita.





Análisis de Fourier

La solución es hacer que la señal **parezca infinita**.

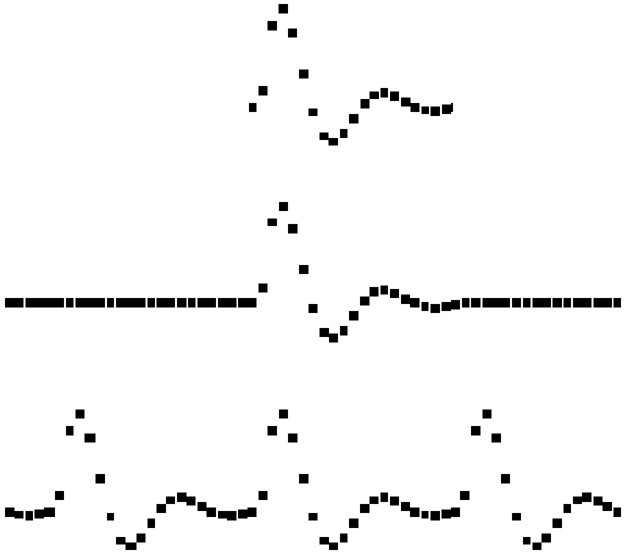
Alternativas:

Extendiendo con muestras de valor cero:

señal Discreta y Aperiódica (DTFT)

Repitiendo las muestras reales:

señal Discreta y Periódica (DFT)

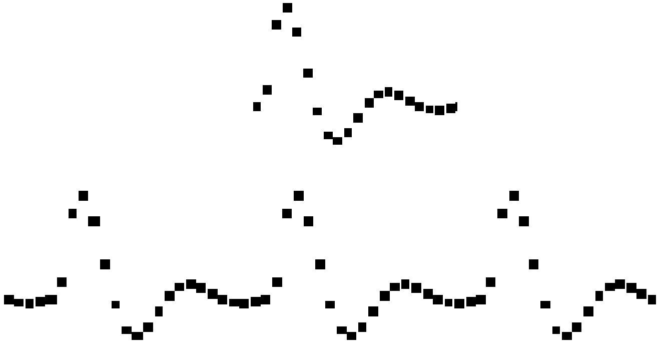


Análisis de Fourier

¿Cómo se calcula la Transformada de Fourier en una computadora?

Se necesitan **infinitas sinusoides** para sintetizar una señal **no periódica**. Pero las computadoras solo puede trabajar con **señales discretas y finitas** por lo que la única transformada que se utiliza en Procesamiento Digital de Señales es la DFT.

Nos concentraremos en la DFT, recurriendo al resto de las transformadas cuando necesitemos contemplar aspectos teóricos.

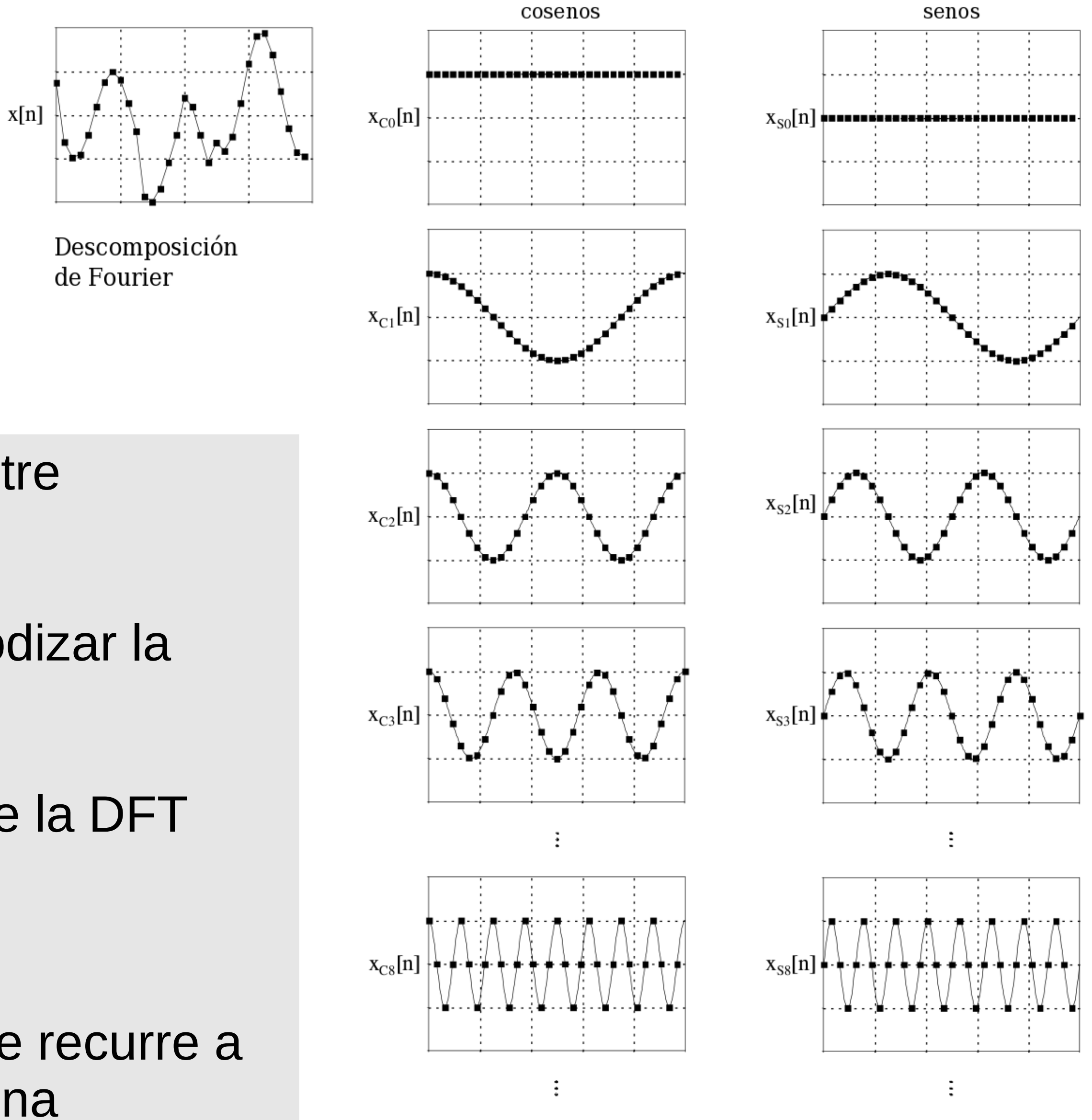


Para analizar en una computadora un conjunto de muestras finito, se repiten y se utiliza la DFT.

Análisis de Fourier

Las sinusoidales sumadas producen la señal original.

Parecen señales finitas pero en términos formales son solo **un período** de señales infinitas.



¿Hay alguna diferencia práctica entre considerarlas finitas o infinitas?

En general **NO**. La trampa de periodizar la señal funciona bien.

A veces **SI**. Algunas propiedades de la DFT solo tienen sentido al considerar la periodicidad.

Es importante *tener presente* que se recurre a esta periodicidad para poder usar una herramienta matemática, la DFT.

La Transformada de Fourier Discreta

La forma más general de la DFT es,

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

donde,

X(k): número complejo que representa un elemento de la DFT

x(n): número complejo que representa un elemento de la señal

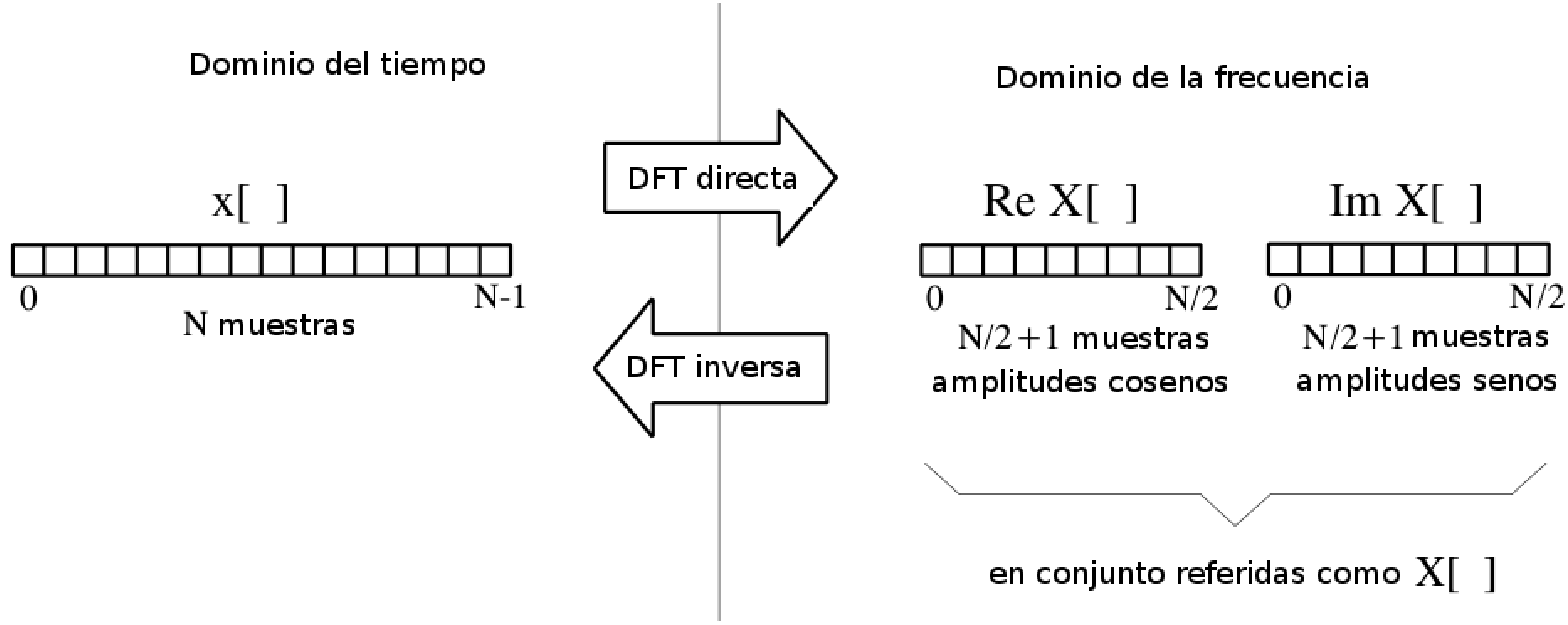
Existe también una **versión real de la DFT**, que utiliza números y álgebra real para el análisis. Por el momento, nos concentraremos en la DFT real para eludir el uso de números complejos. Se pierde generalidad pero se gana simplicidad. Más adelante retomaremos la versión compleja.

La DFT real

En la DFT Real se considera:

Entrada Señal discreta real x[n] de N puntos - ***Dominio del tiempo.***

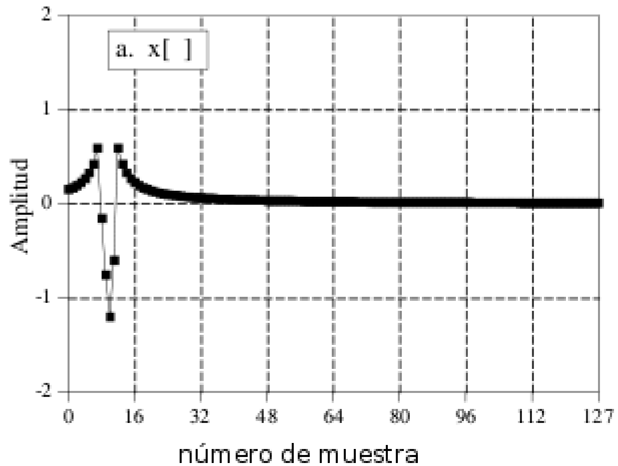
Salida Dos señales ReX[k] y ImX[k] de N/2+1 puntos - ***Dominio de la frecuencia.***



Las señales de salida contienen las amplitudes escaladas de las componentes coseno (ReX[k]) y seno (ImX[k]).

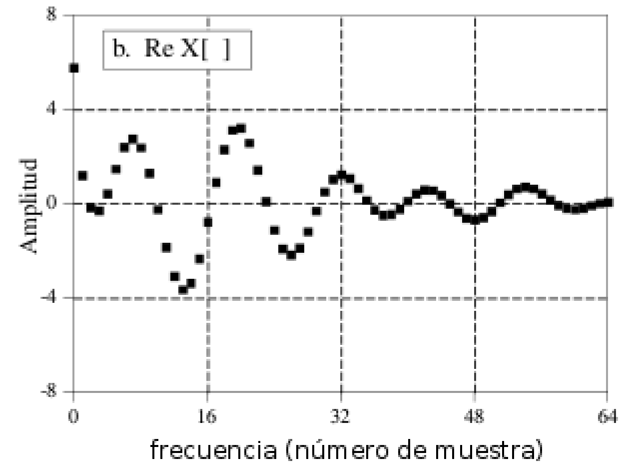
La DFT real

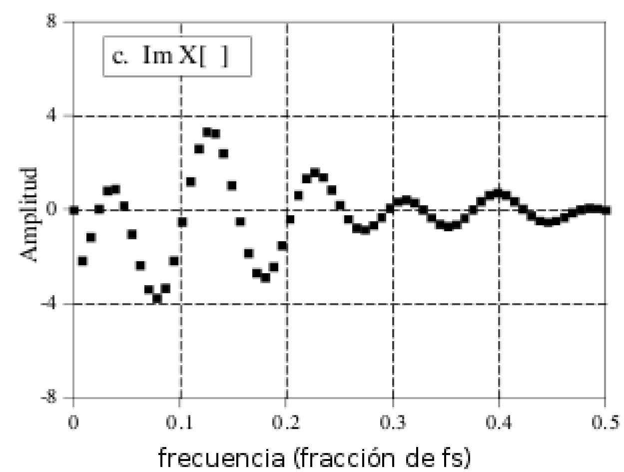
Dominio del tiempo



Ambas representaciones de la señal contienen la misma información, de diferente forma.

Dominio de la frecuencia





Funciones base de la DFT

Las ondas seno y coseno usadas en la DFT se denominan *funciones base.*

El resultado de la DFT son las amplitudes normalizadas de las componentes de la señal analizada. Si se multiplican estas amplitudes por las funciones base, que son sinusoidales de amplitud unitaria, se obtienen sinusoides escaladas que al sumarse forman la señal original.

$$c_k[n] = \cos(2\pi k n / N)$$
$$s_k[n] = \sin(2\pi k n / N)$$

donde,
ck[n] - ondas coseno que se multiplican por las amplitudes en ReX[k]
sk[n] - ondas seno que se multiplican por las amplitudes en ImX[k].

Funciones base de la DFT

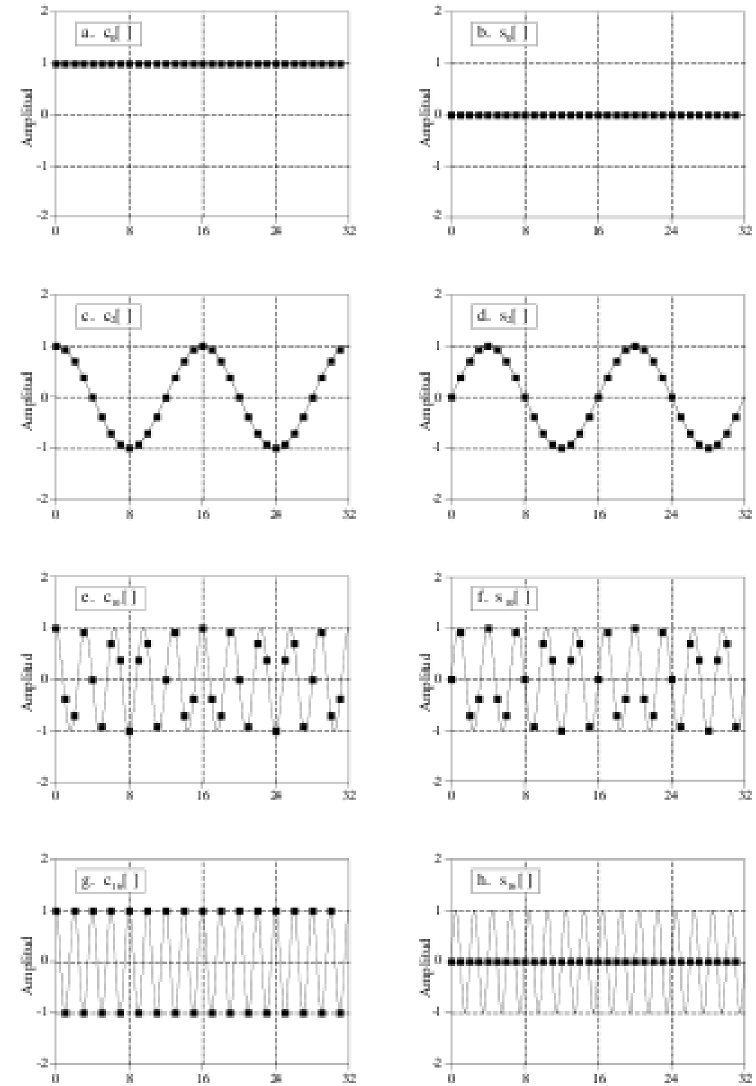
El parámetro **k** determina la frecuencia.

Es la cantidad de **ciclos completos** que entran en N muestras.

La primera y última señal seno son nulas.

La primera corresponde a un seno de frecuencia cero y la última al muestreo de una señal sinusoidal en los cruces por cero.

Estas componentes no contribuyen a la síntesis, por lo que si la señal de **entrada** tiene **N muestras**, la **salida** tiene solo **N valores** útiles (y no N+2).



Cálculo de la DFT inversa, síntesis

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} Re\bar{X}[k]\cos(2\pi k n/N) + \sum_{k=0}^{N/2} Im\bar{X}[k]\sin(2\pi k n/N)$$

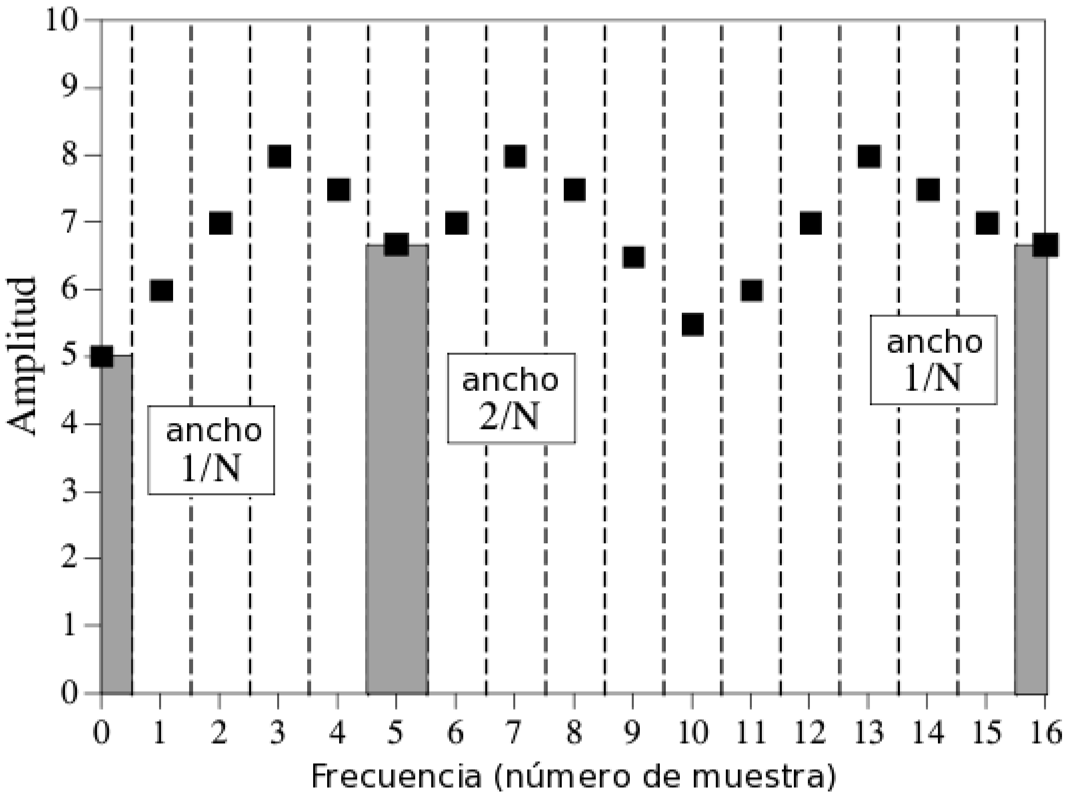
se usan los valores en ReX[k] y Im[k]
pero escalados según,

$$Re\bar{X}[k] = \frac{ReX[k]}{N/2}$$

$$Im\bar{X}[k] = -\frac{ImX[k]}{N/2}$$

$$Re\bar{X}[0] = \frac{ReX[0]}{N}$$

$$Re\bar{X}[N/2] = \frac{ReX[N/2]}{N}$$



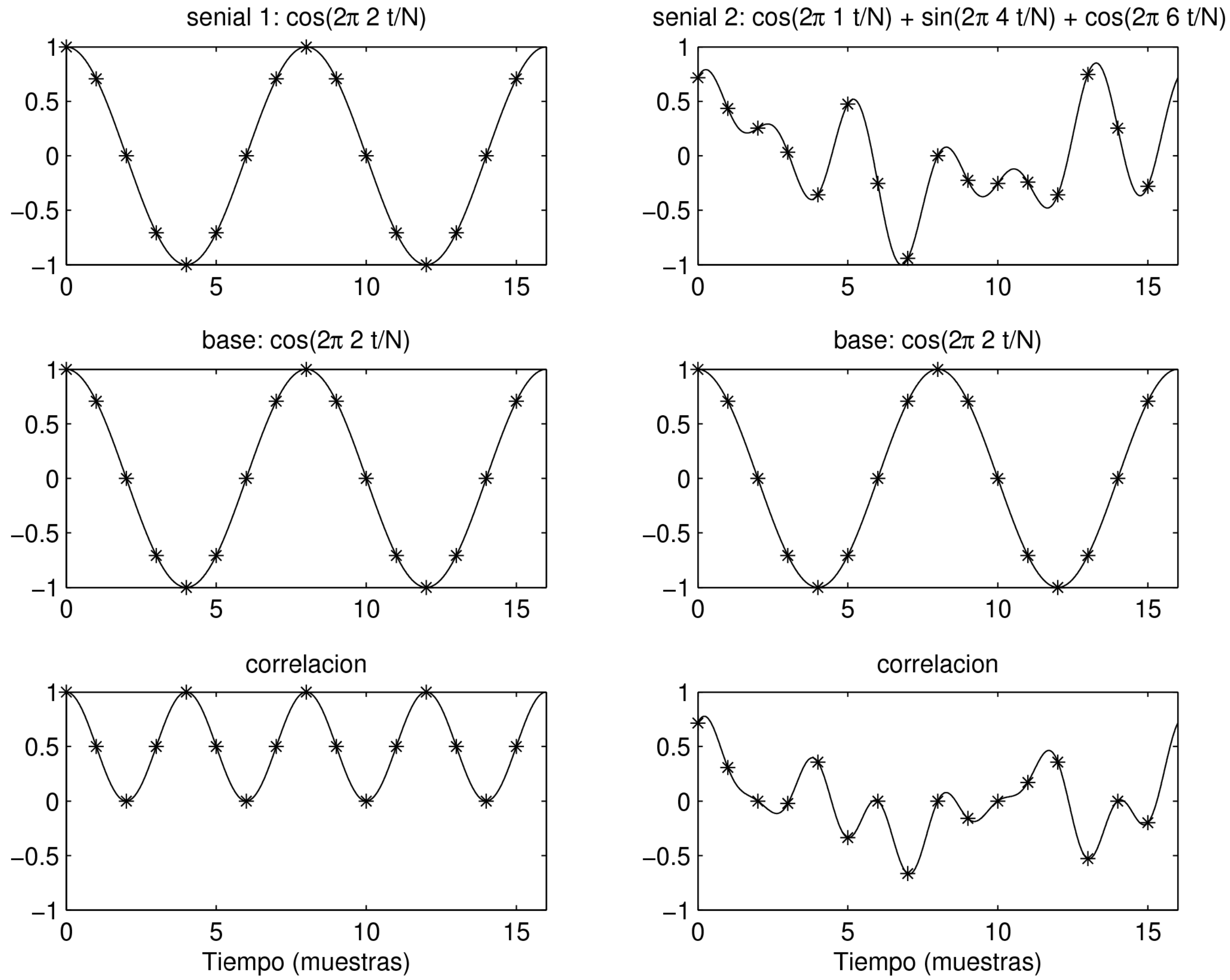
Cálculo de la DFT directa, análisis

Cálculo por correlación: detectar una onda conocida en otra señal

Permite comparar dos señales indicando cuan similares son.

El proceso consiste en multiplicar las señales punto a punto y sumar todos los valores resultantes.

En el primer caso las señales coinciden. La **correlación es máxima**.
En el segundo caso la sinusoide no está presente en la señal analizada. La **correlación es nula**.



Cálculo de la DFT directa, análisis

Todos los puntos del dominio de la frecuencia pueden calcularse de esta forma. Las ecuaciones usadas son las siguientes:

$$ReX[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[\mathrm{n}] \cos(2\pi k \mathrm{n}/N)$$

$$ImX[k] = -\sum_{i=0}^{N-1} x[\mathrm{n}] \sin(2\pi k \mathrm{n}/N)$$

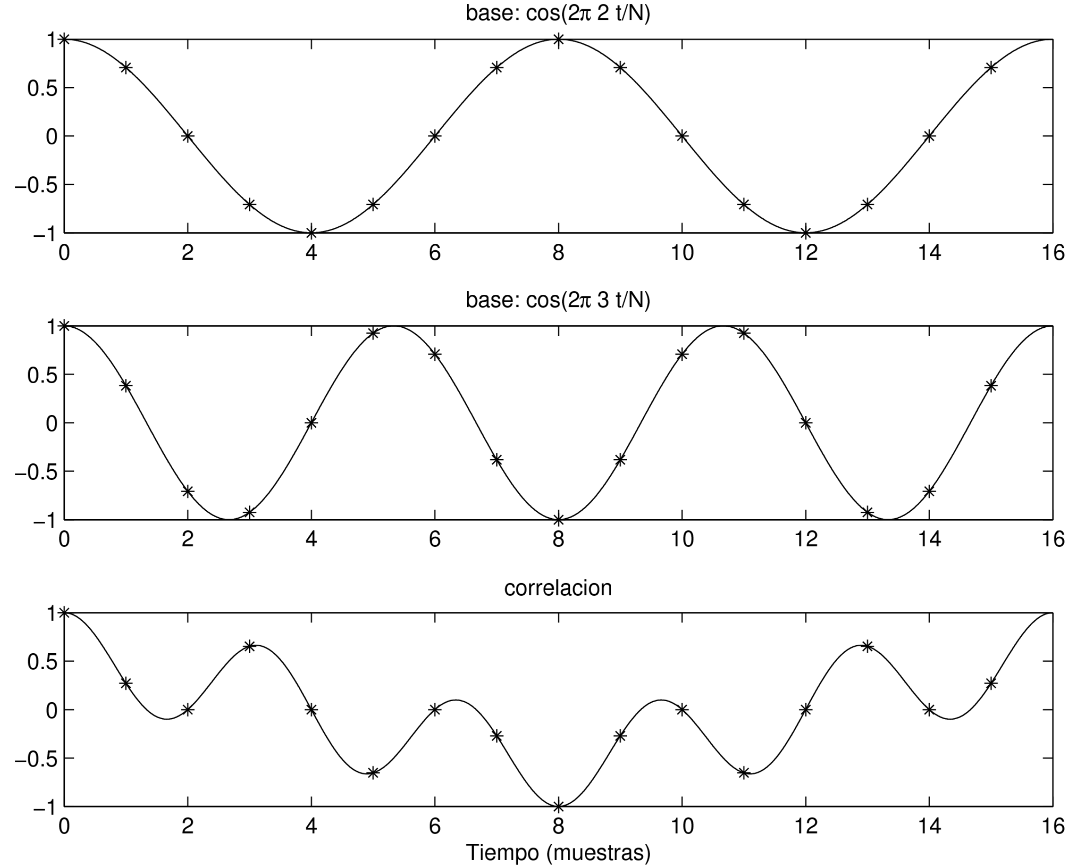
Cada valor en el dominio de la frecuencia indica que grado de similitud tiene la señal analizada con la sinusoide correspondiente.

Para calcular la DFT se **correlaciona** la señal analizada con cada una de las funciones base.

Cálculo de la DFT directa, análisis

Para que el algoritmo basado en correlación funcione, las funciones base deben estar completamente no correlacionadas: **base ortogonal**.

Esto quiere decir que si se multiplican dos funciones base y se suman los valores, resultantes el resultado debe ser cero.

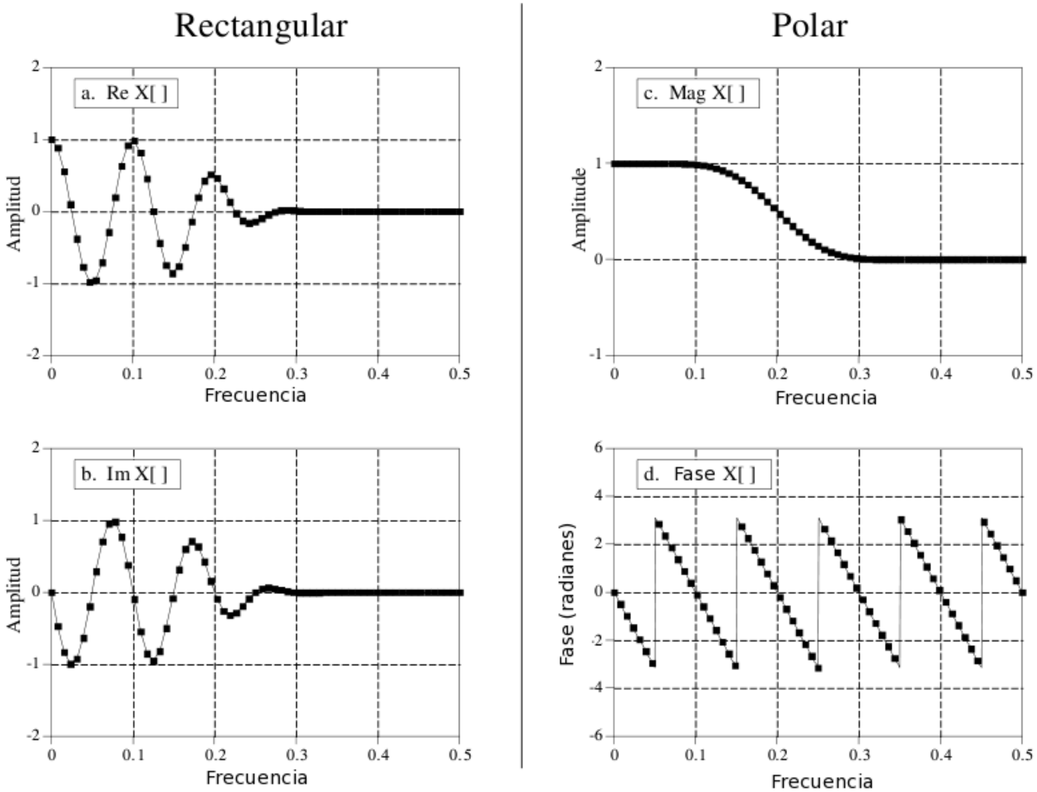


Notación polar

La representación rectangular (ReX[k] y ImX[k]) es útil para calcular la DFT.

Sin embargo es prácticamente imposible entender las características de una señal en frecuencia observando esta representación.

Es más claro representar las señales en frecuencia usando **notación polar**.



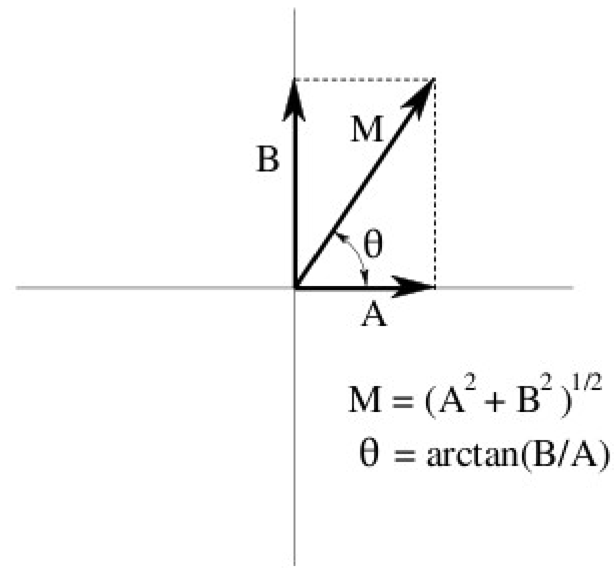
Notación polar

¿Porqué es más sencillo entender el dominio de la frecuencia en notación polar?

Si una onda sinusoidal entra a un sistema lineal, la salida es también una sinusoide de igual frecuencia. Solo la amplitud y la fase pueden cambiar.

La notación polar representa una señal directamente en términos de amplitud y fase.

$$A\cos(x) + B\sin(x) = M\cos(x+\theta)$$



$$MagX[k] = \left(ReX[k]^2 + ImX[k]^2\right)^{1/2}$$

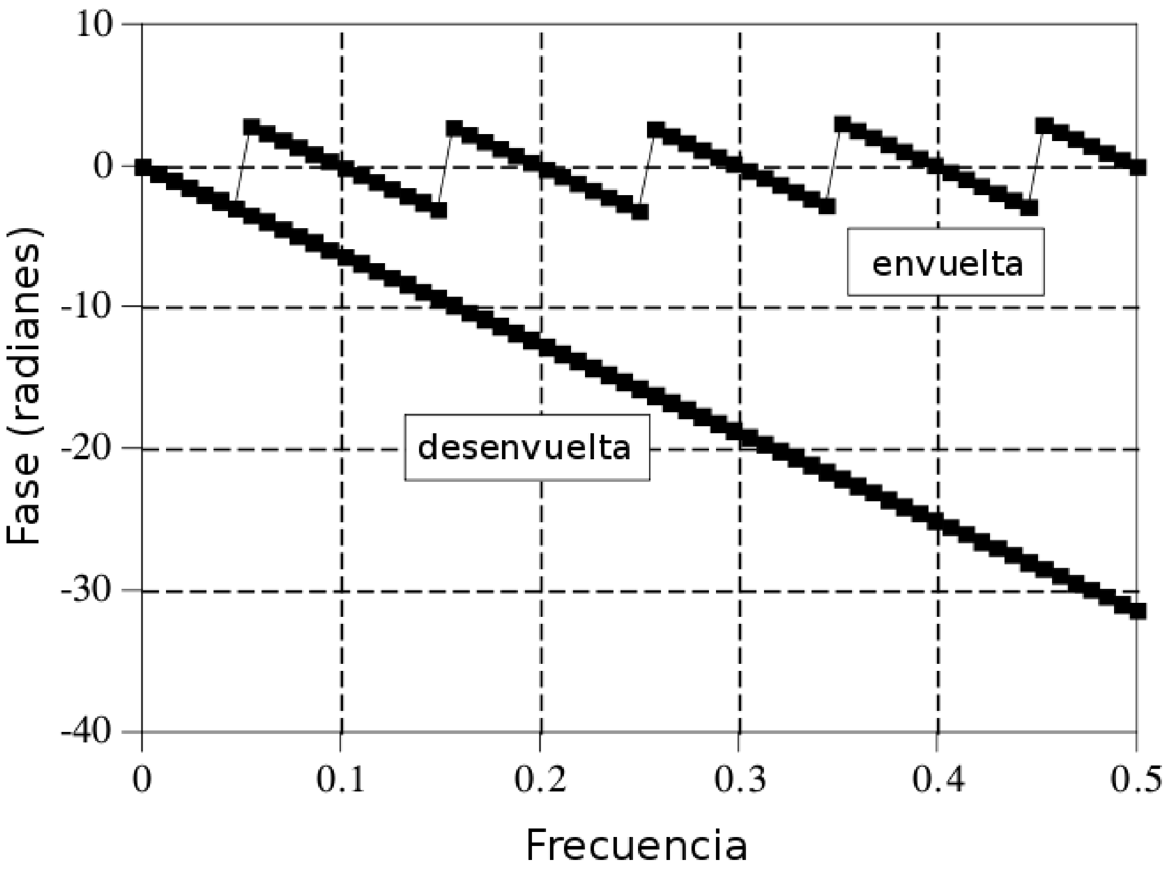
$$\textit{Fase}\,X[k] = \arctan\left(\frac{ImX[k]}{ReX[k]}\right)$$

Fase de la DFT

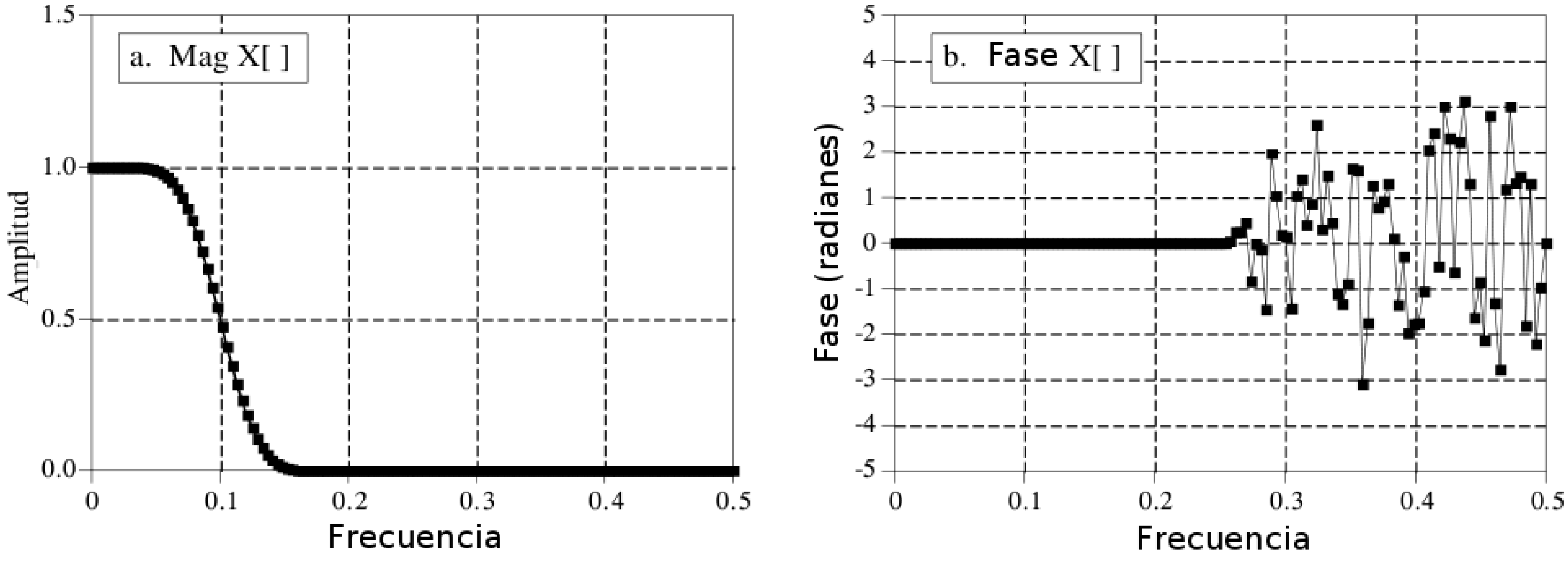
Ambiguedad de la fase:
θ, $\theta+2\pi$, $\theta+4\pi$, $\theta+6\pi$

Fase envuelta (wrapped):
El menor valor posible.

Fase desenvuelta (unwrapped):
Sumar o restar 2π de forma de minimizar la diferencia de fase entre muestras sucesivas.



Fase de la DFT



Para frecuencias en las que la magnitud es despreciable, la fase puede variar arbitrariamente debido al error de redondeo de las operaciones.

En estos casos la fase no tiene ningún significado y se ignora.