

Introducción a la Teoría del Procesamiento Digital de Señales de Audio

Transformada de Fourier Discreta

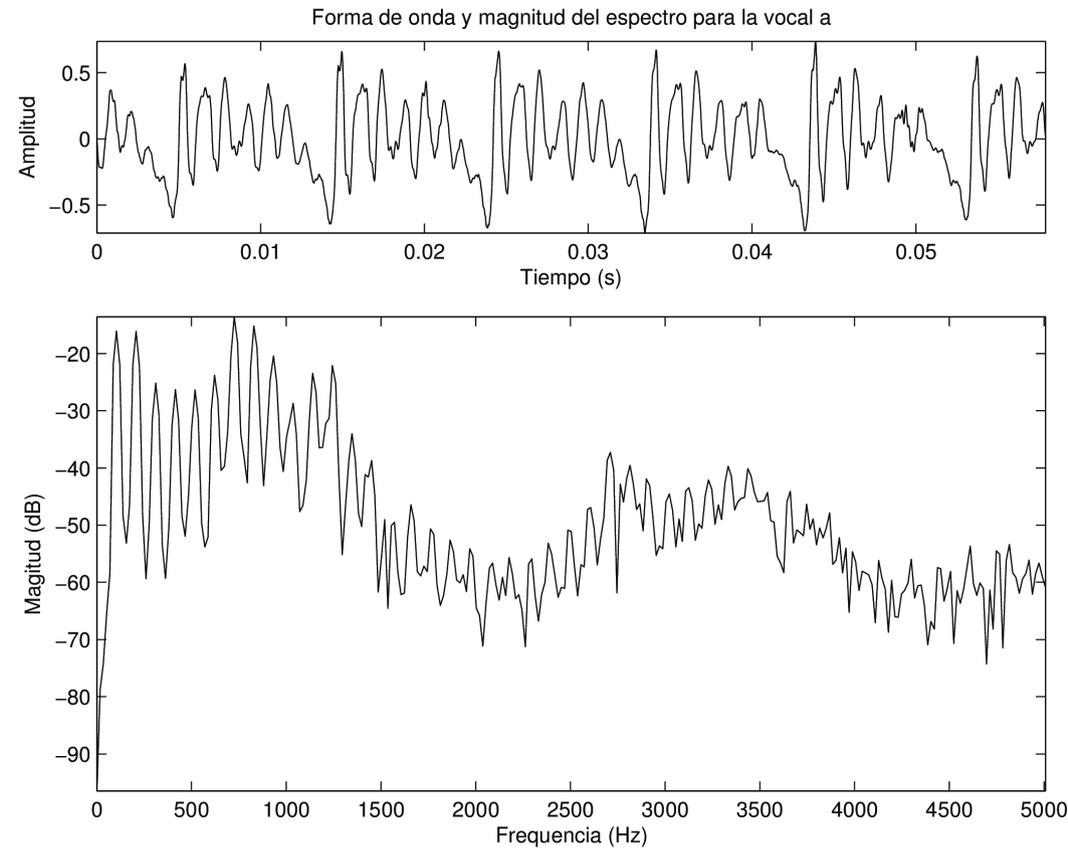
Resumen

- Análisis espectral de señales
enventanado, derramamiento y resolución, tipo de ventanas,
relleno de ceros, transformada de tiempo corto

Análisis espectral de señales

Es común que la información de interés esté codificada en los **componentes sinusoidales** que forman la señal, debido a la **naturaleza oscilatoria** de muchos fenómenos físicos (e.g. vibración de cuerdas vocales en la voz).

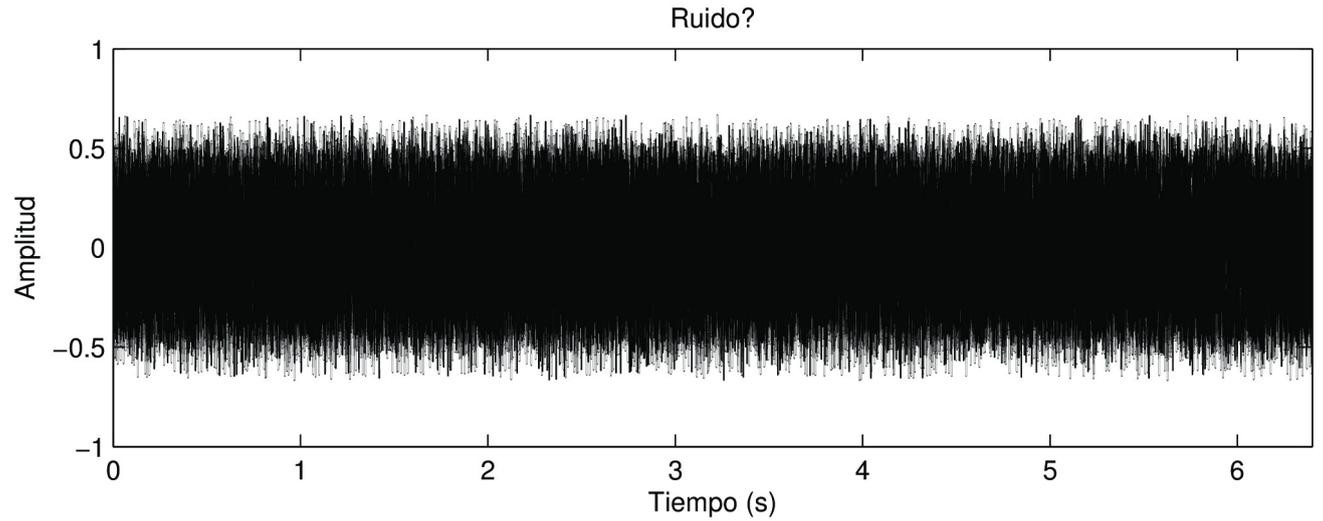
Muchas veces la forma de la señal en el tiempo no es relevante, sino que la información clave está en la **frecuencia, amplitud y fase** de los componentes sinusoidales.



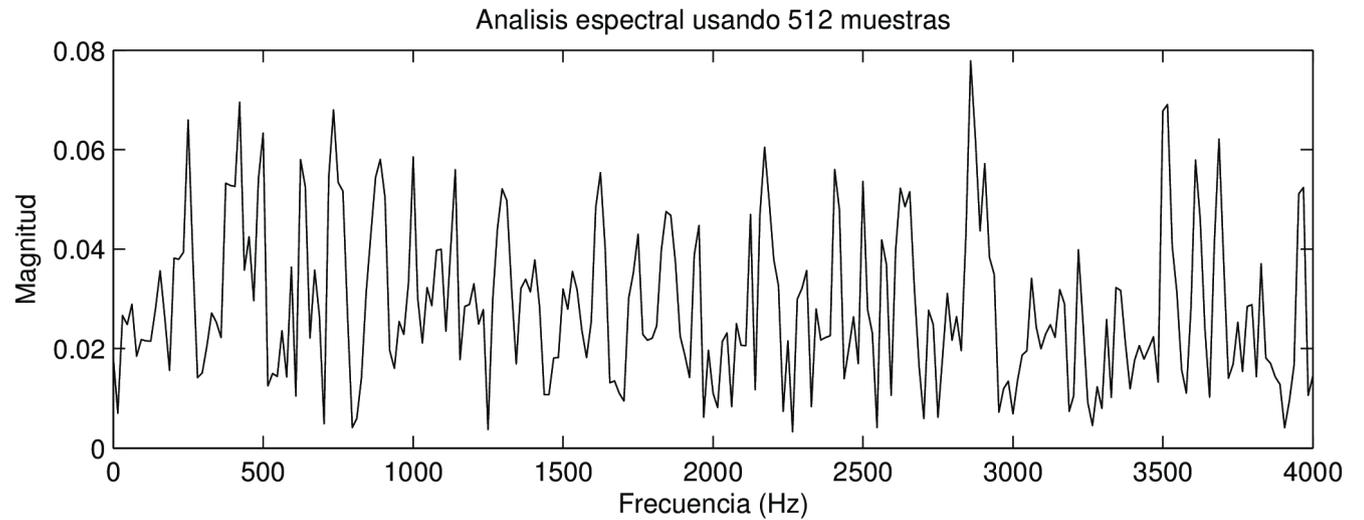
Análisis espectral de señales

Ejemplo:

Señal a analizar



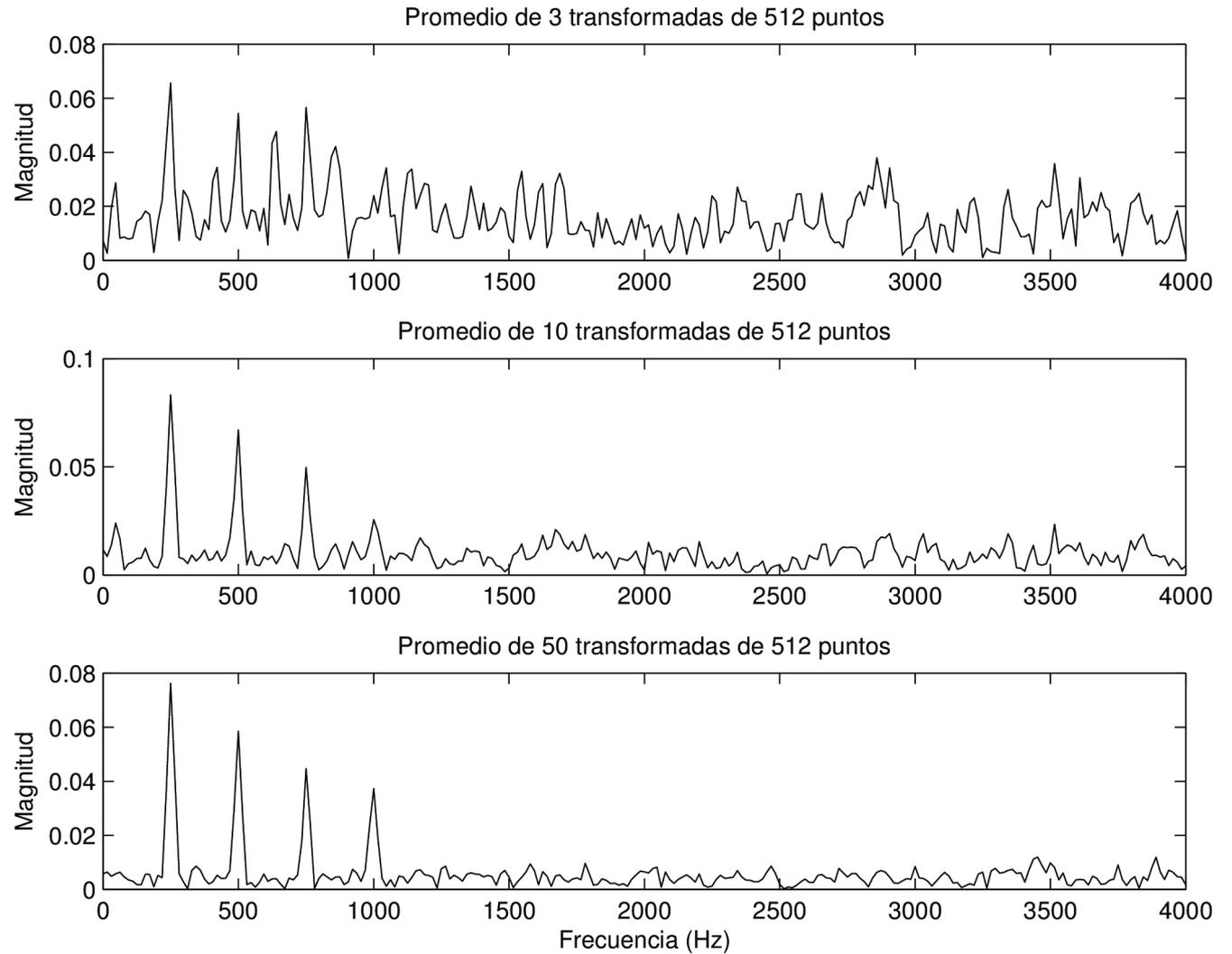
DFT de una trama
de 512 muestras



Análisis espectral de señales

Ejemplo:

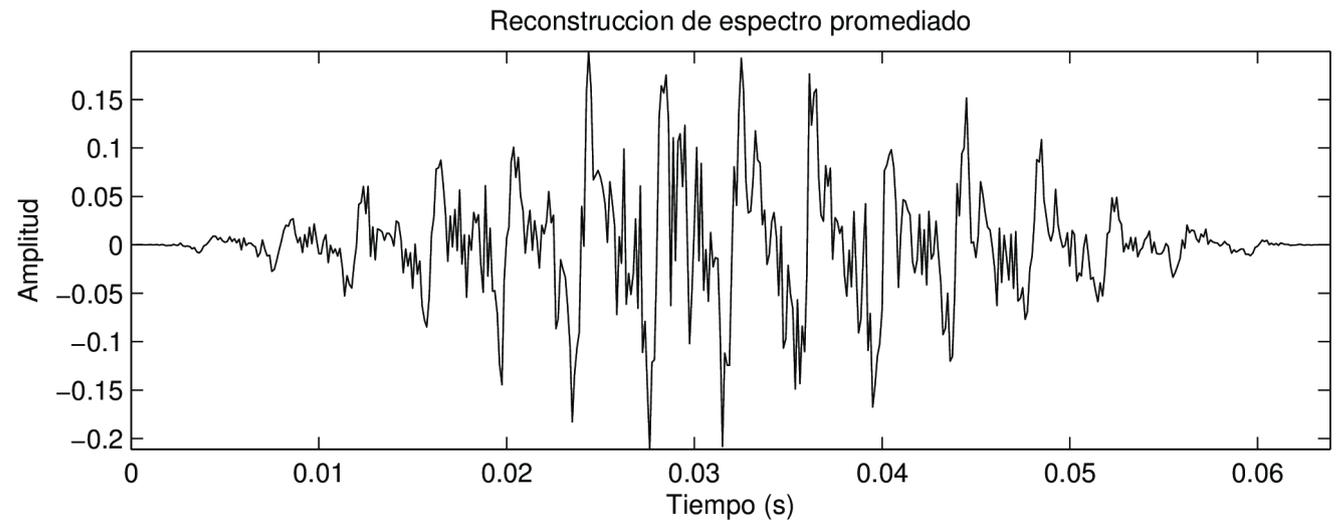
Promedio de la DFT
de varias tramas
sucesivas de 512
muestras



Análisis espectral de señales

Ejemplo:

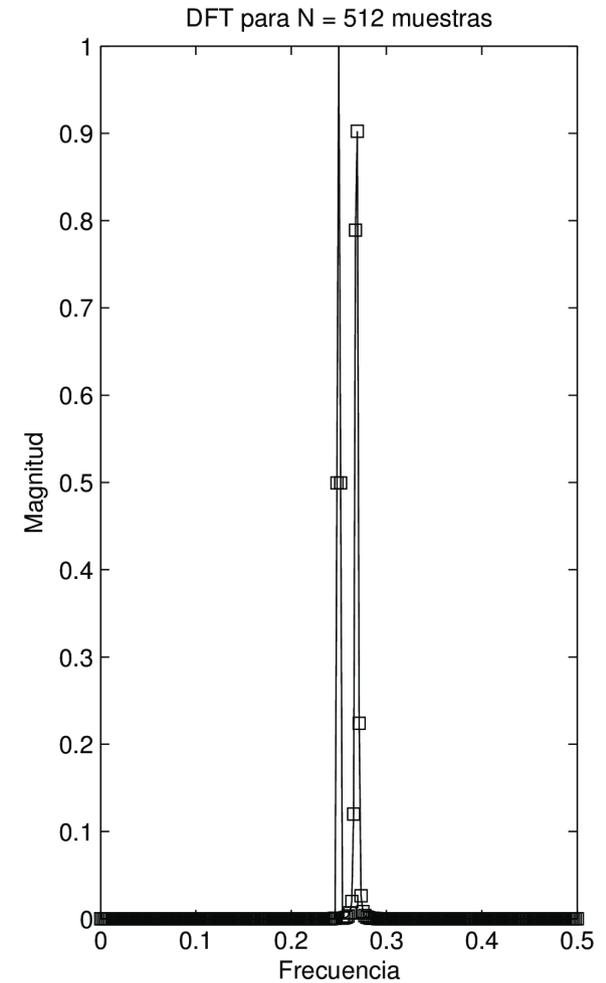
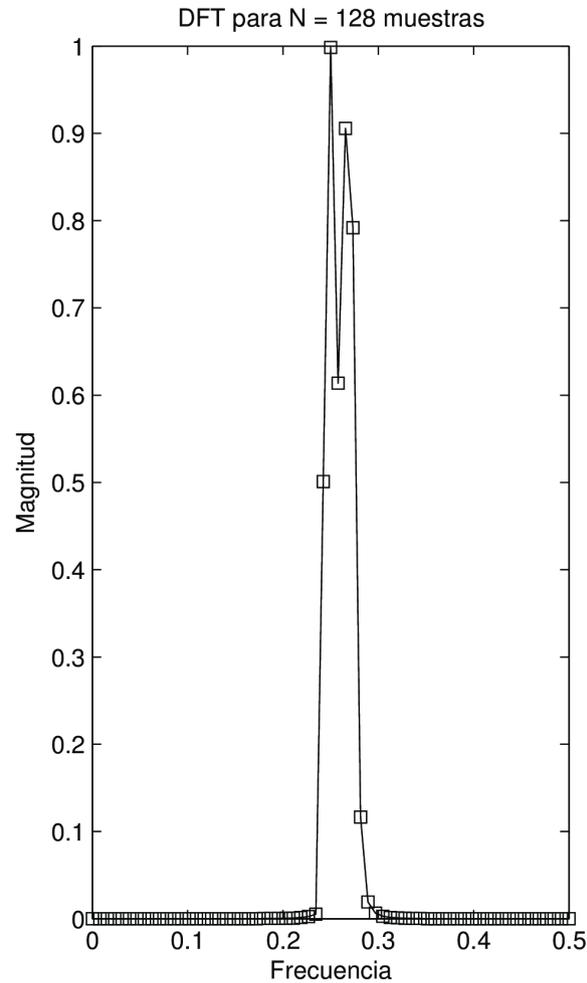
Reconstrucción a partir de espectro promediado



Análisis espectral de señales

Resolver componentes cercanos en frecuencia:

cantidad de puntos de la DFT
determina resolución = f_s/N

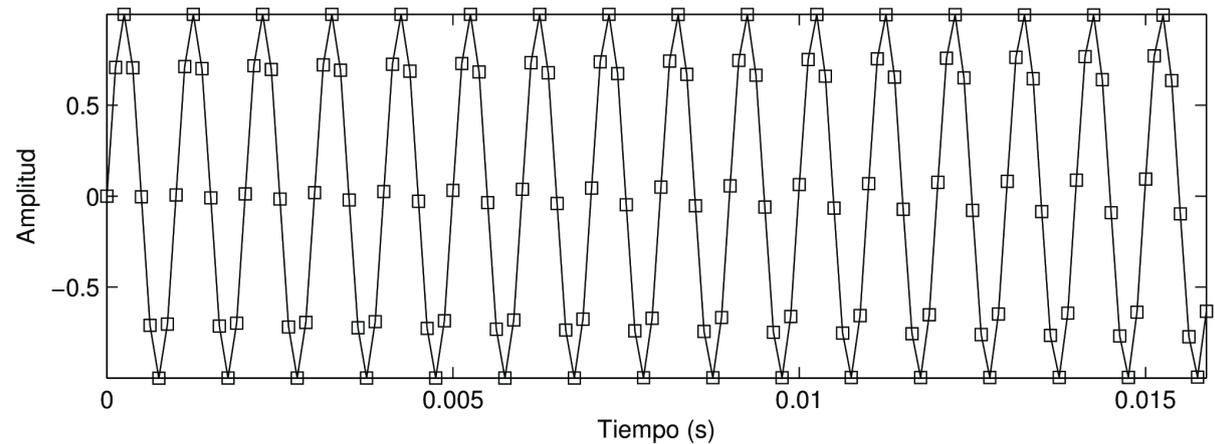
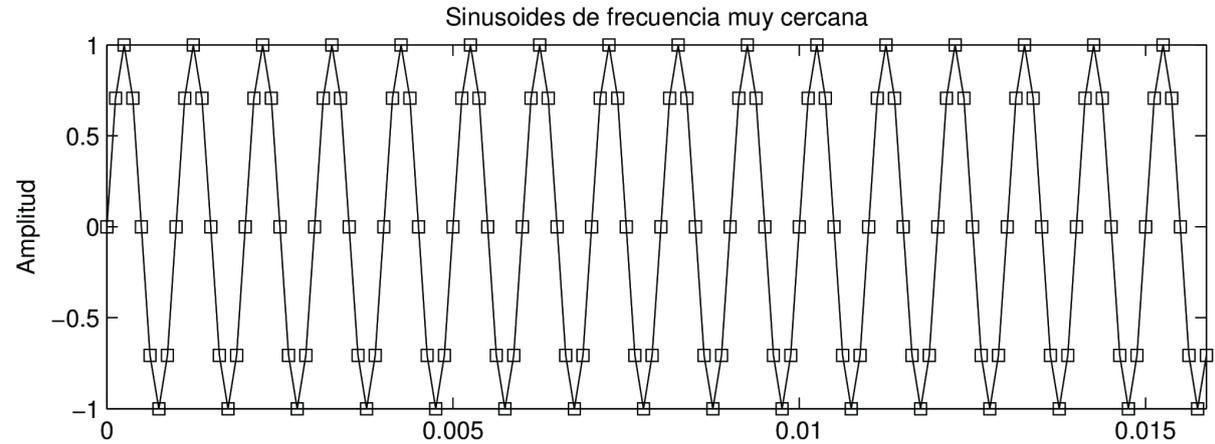


Análisis espectral de señales

Resolver componentes cercanos en frecuencia:

cantidad de puntos de la DFT determina resolución = f_s/N

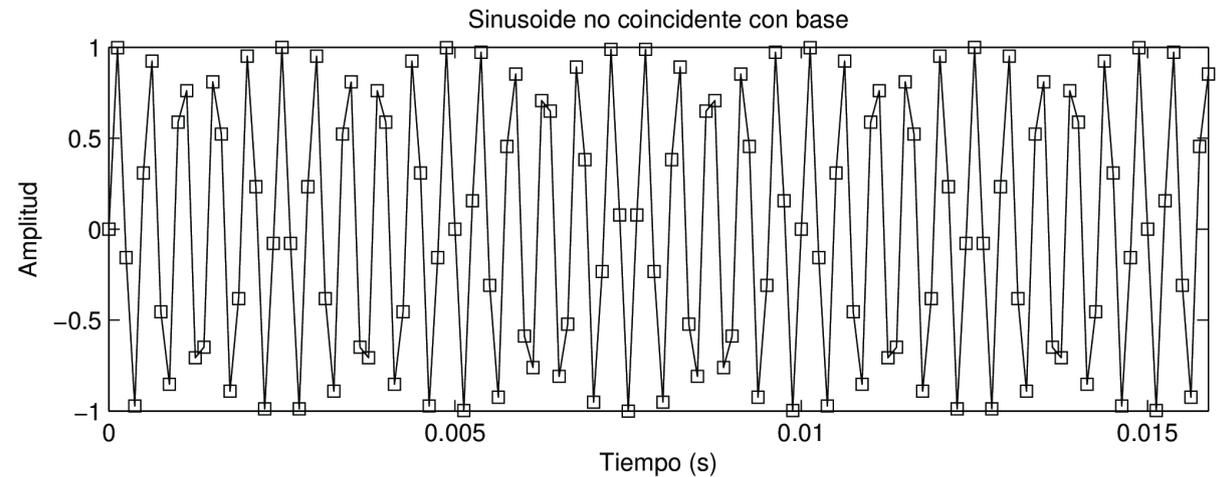
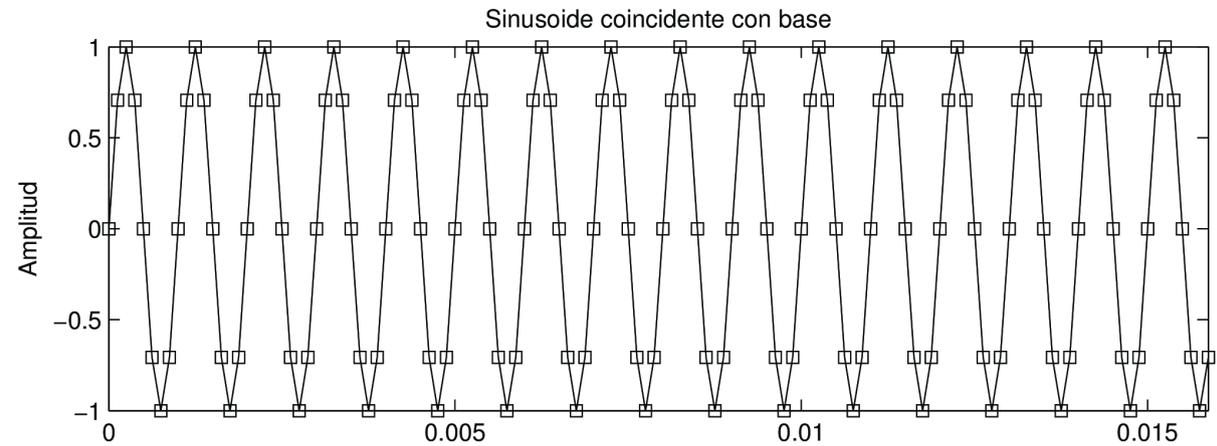
cuánto más cercanos dos componentes, se necesitan más muestras para poder discriminarlos



Análisis espectral de señales

Sinusoide **coincidente** con base de la DFT:

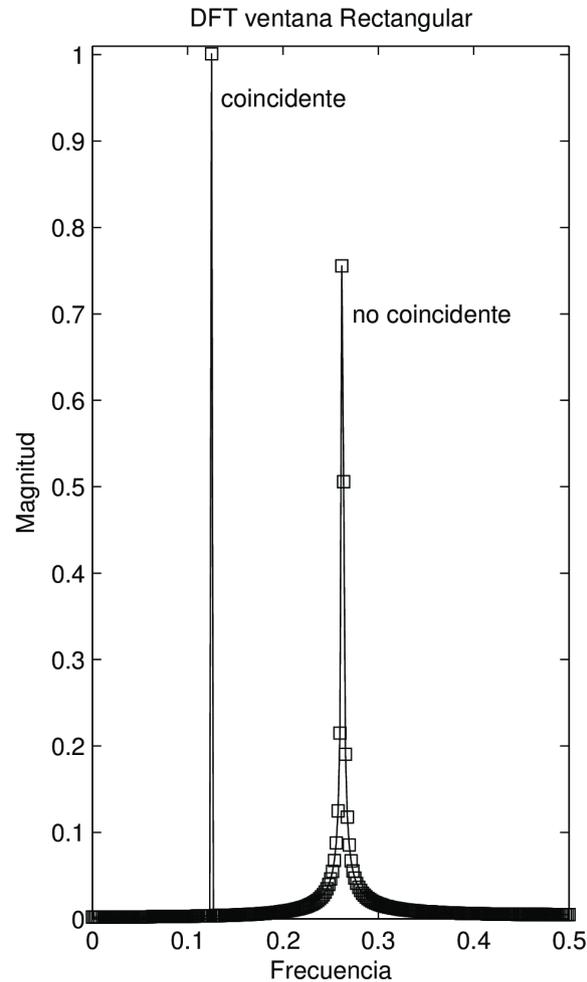
Sinusoide **no coincidente** con base de la DFT:



Análisis espectral de señales

Sinusoide **coincidente** con base de la DFT: un único punto en frecuencia

Sinusoide **no coincidente** con base de la DFT: pico extendido a componentes vecinos (derramamiento)

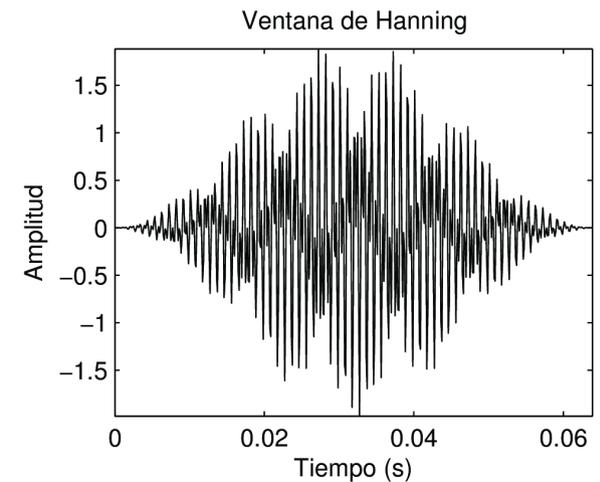
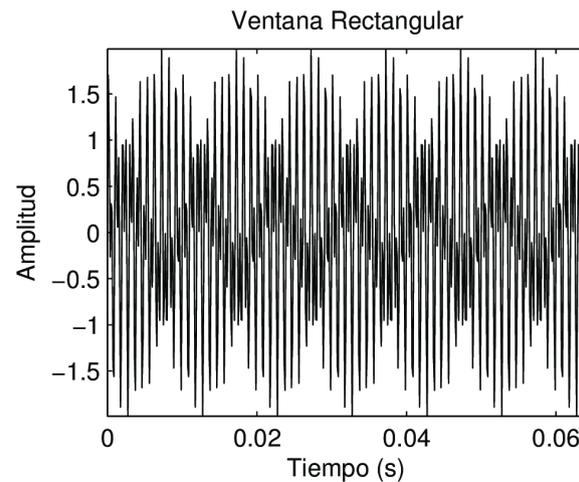


Análisis espectral de señales

Sinusoide **coincidente** con base de la DFT: un único punto en frecuencia

Sinusoide **no coincidente** con base de la DFT: pico extendido a componentes vecinos (derramamiento)

Alternativa:
usar **ventana de suavizado**



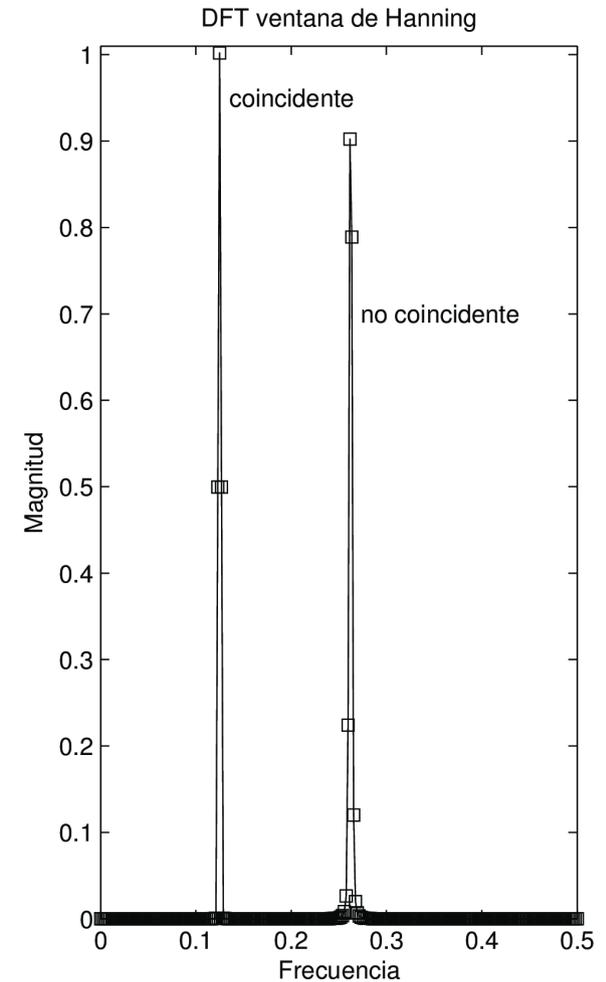
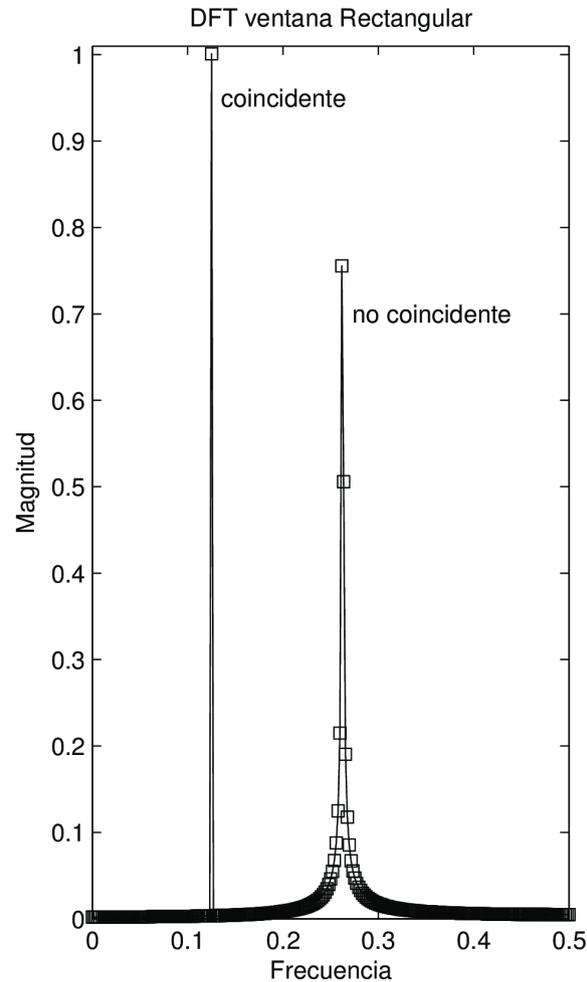
Análisis espectral de señales

Sinusoide **coincidente** con base de la DFT: un único punto en frecuencia

Sinusoide **no coincidente** con base de la DFT: pico extendido a componentes vecinos (derramamiento)

Alternativa:
usar **ventana de suavizado**

Efectos:
se asemejan más los picos
se reduce el derramamiento
se reduce la resolución



Enventanado: compromiso entre resolución y derramamiento

Enventanado: aspectos teóricos

señal:
sinusoide discreta infinita

espectro:
pico infinitesimalmente angosto

Enventanado: aspectos teóricos

señal:

sinusoide discreta infinita

1) enventanado:

producto de la señal con
ventana suavizante

espectro:

pico infinitesimalmente angosto

1) efecto del enventanado:

convolución de espectro de la
señal con espectro de la ventana

Enventanado: aspectos teóricos

señal:
sinusoide discreta infinita

1) enventanado:

producto de la señal con
ventana suavizante

señal **infinita** con sólo unos
pocos valores no nulos

espectro:
pico infinitesimalmente angosto

1) efecto del enventanado:

convolución de espectro de la
señal con espectro de la ventana

espectro **continuo** (infinitos
valores ente frecuencia 0 y 0.5)

Enventanado: aspectos teóricos

señal:
sinusoide discreta infinita

1) enventanado:

producto de la señal con
ventana suavizante

señal **infinita** con sólo unos
pocos valores no nulos

2) seleccionar sólo N puntos:

incluir los puntos no nulos ...

espectro:
pico infinitesimalmente angosto

1) efecto del enventanado:

convolución de espectro de la
señal con espectro de la ventana

espectro **continuo** (infinitos
valores ente frecuencia 0 y 0.5)

2) efecto de discretizado:

corresponde a N valores de
frecuencia entre 0 y 0.5
(muestreo del espectro continuo)

Enventanado: aspectos teóricos

señal:
sinusoide discreta infinita

1) enventanado:

producto de la señal con
ventana suavizante

señal **infinita** con sólo unos
pocos valores no nulos

2) seleccionar sólo N puntos:

incluir los puntos no nulos ...

pero también pueden incluirse
una cantidad de puntos nulos

espectro:
pico infinitesimalmente angosto

1) efecto del enventanado:

convolución de espectro de la
señal con espectro de la ventana

espectro **continuo** (infinitos
valores ente frecuencia 0 y 0.5)

2) efecto de discretizado:

corresponde a N valores de
frecuencia entre 0 y 0.5
(muestreo del espectro continuo)

se acercan los puntos en el
espectro

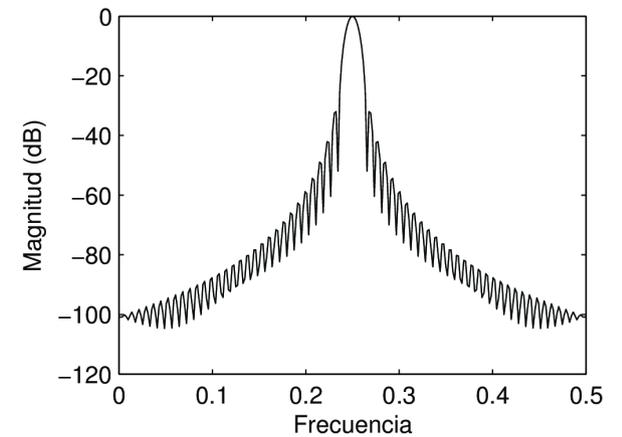
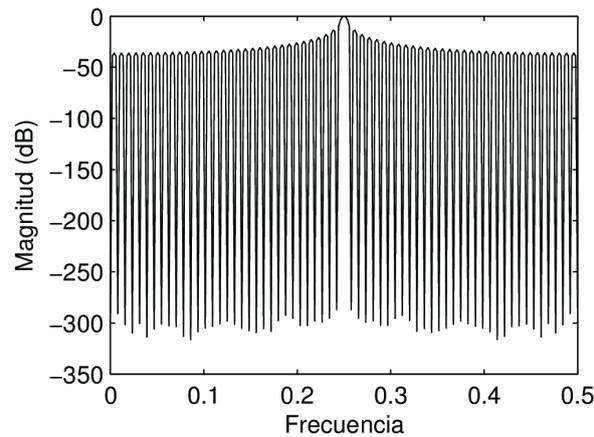
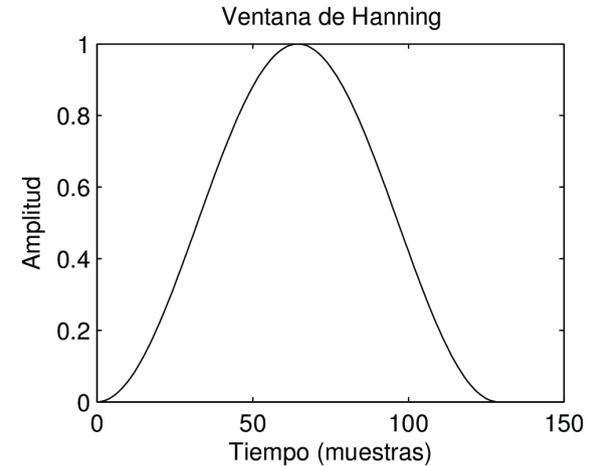
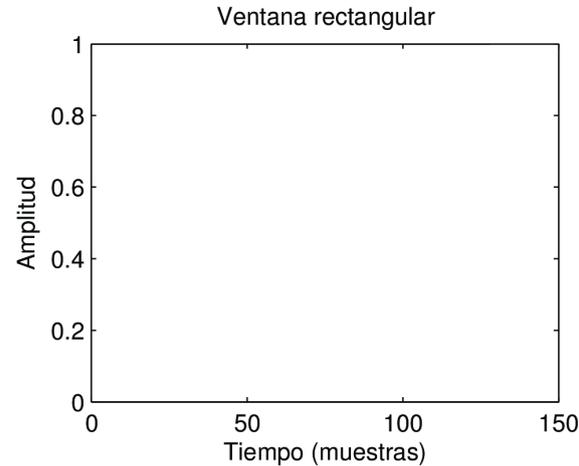
Efecto de la ventana

Sinusoide enventanada

Espectro:
espectro de la ventana
centrado en la delta

Efecto:

- ensanchamiento del pico
- derramamiento espectral



Efecto de la ventana

Sinusoide enventanada

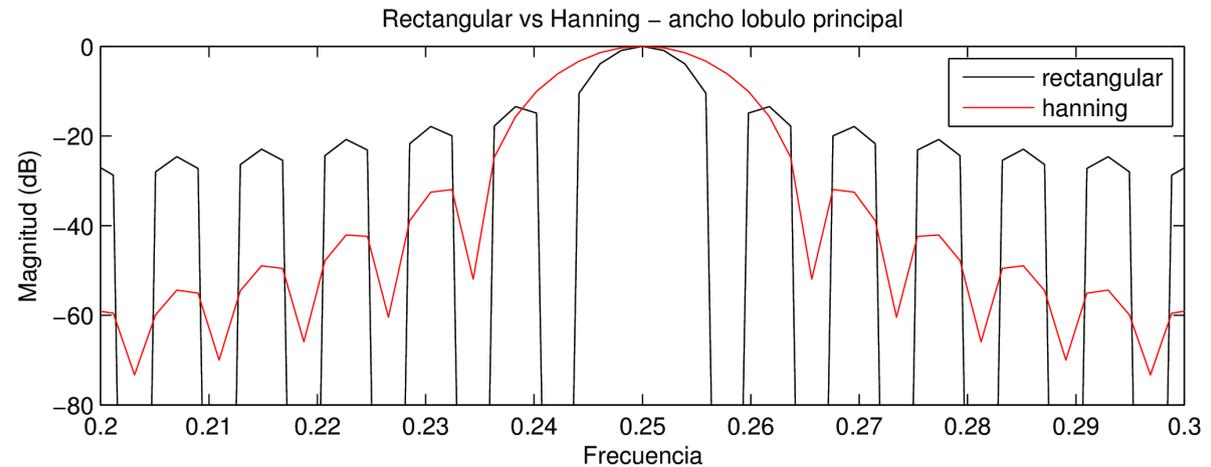
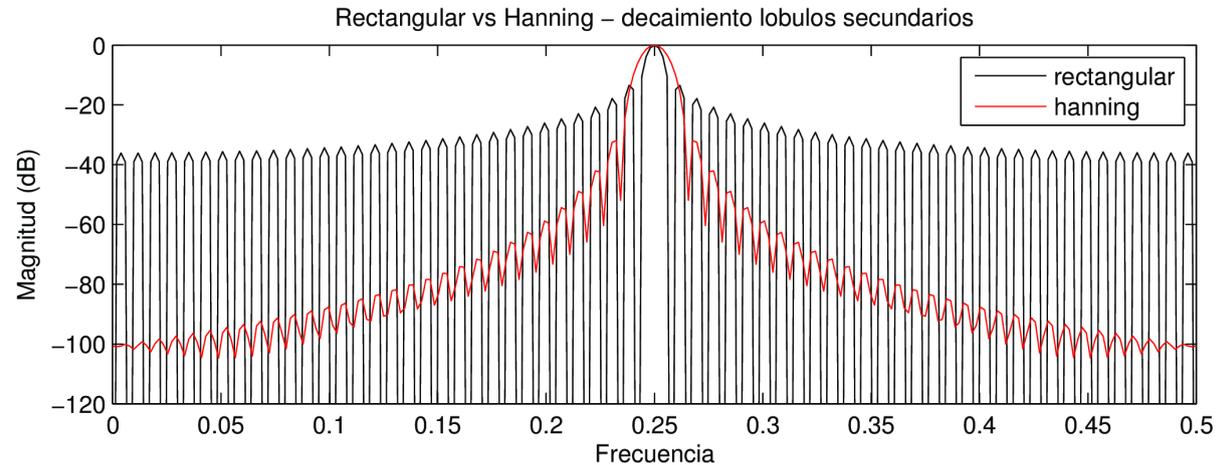
Espectro:
espectro de la ventana
centrado en la delta

Efecto:

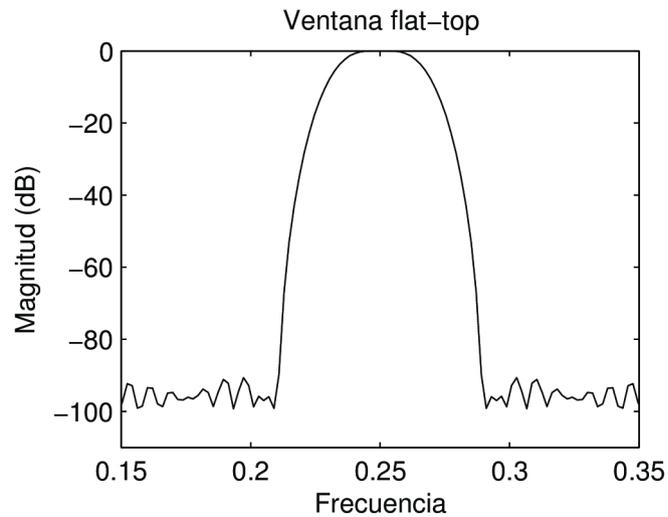
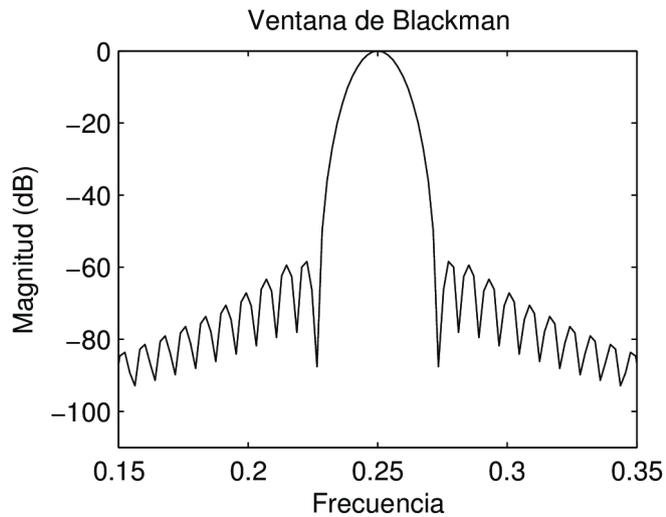
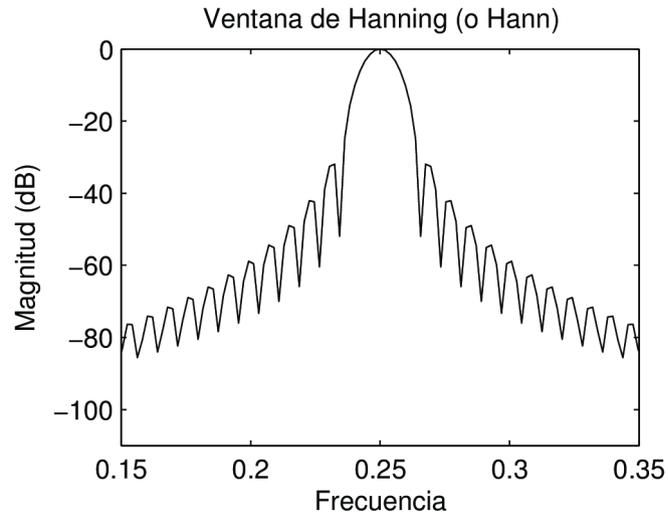
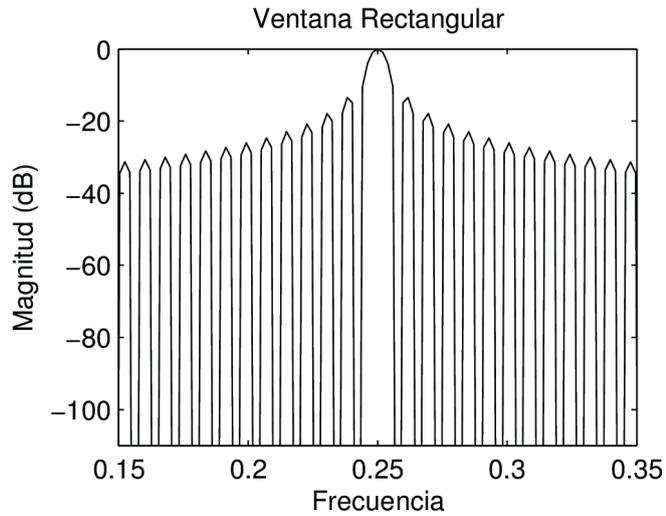
- ensanchamiento del pico
- derramamiento espectral

Compromiso:

- ancho lóbulo principal (resolución)
- amplitud de lóbulos secundarios (derramamiento)

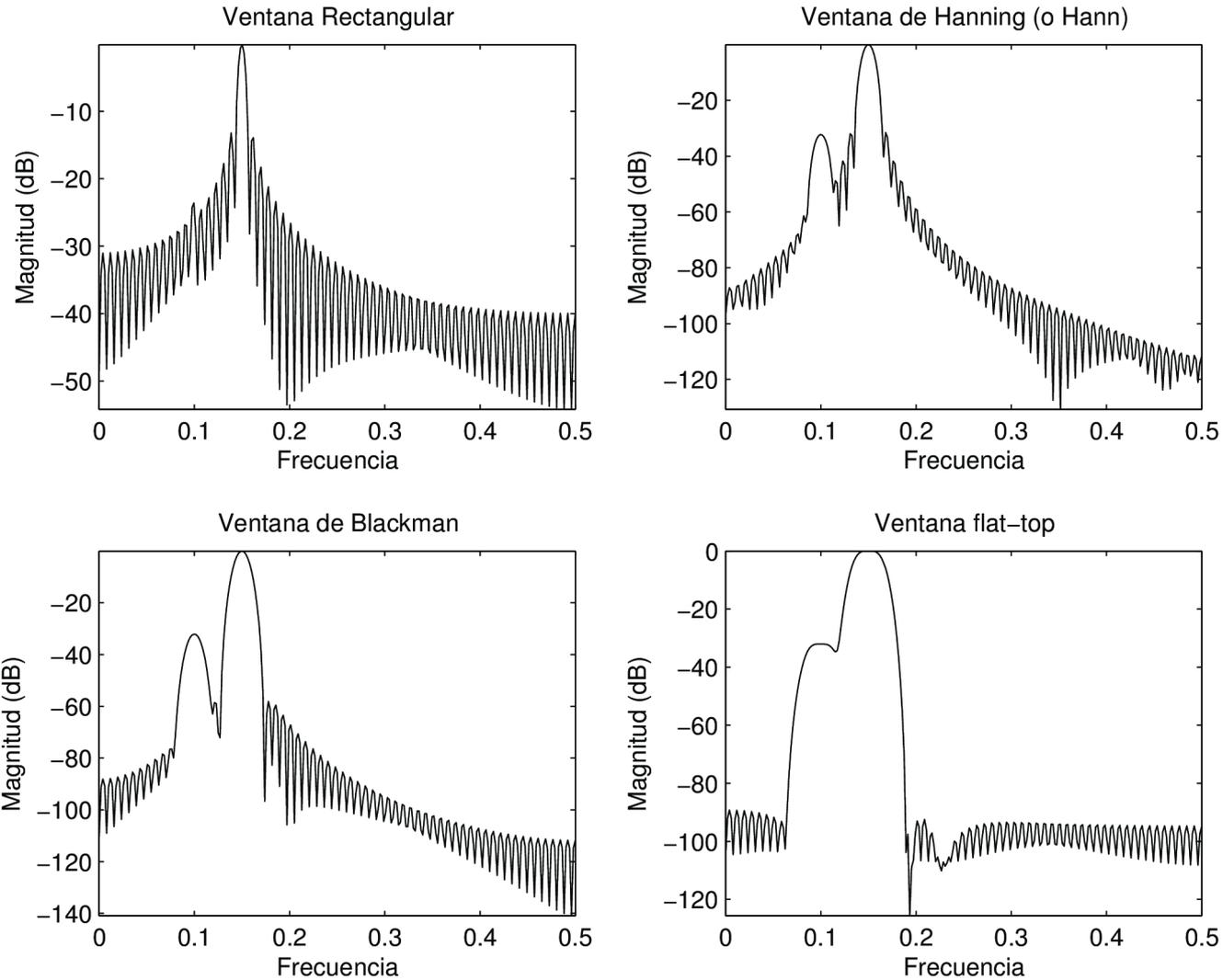


Efecto de la ventana



Comparación de espectro de ventanas:
Rectangular, Hanning, Blackman y Flat-Top

Efecto de la ventana



Comparación de ventanas para sinusoides cercanas (0.1 y 0.15):
Rectangular, Hanning, Blackman y Flat-Top

Efecto de la ventana

Ventanas en el tiempo:

- Rectangular:

$$v(n) = 1$$

- Hann:

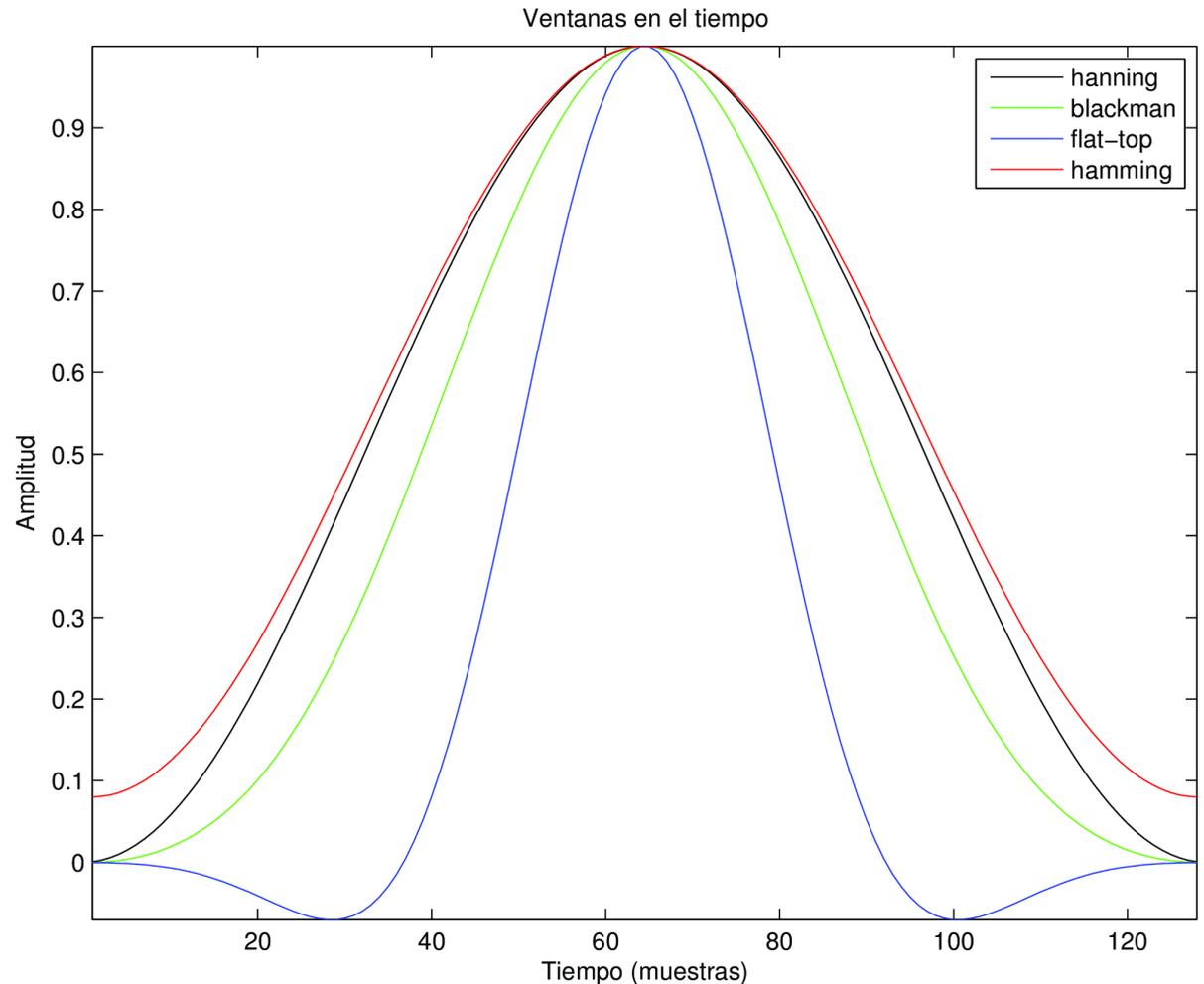
$$v(n) = a_0 - a_1 \cos(2\pi n/N)$$

con $a_0 = 0.5$, $a_1 = 0.5$

- Hamming:

$$v(n) = a_0 - a_1 \cos(2\pi n/N)$$

con $a_0 = 0.54$, $a_1 = 0.56$



Comparación de ventanas en el tiempo:
Hanning, Blackman, Flat-Top y Hamming

Efecto de la ventana

Ventanas en el tiempo:

- Blackman:

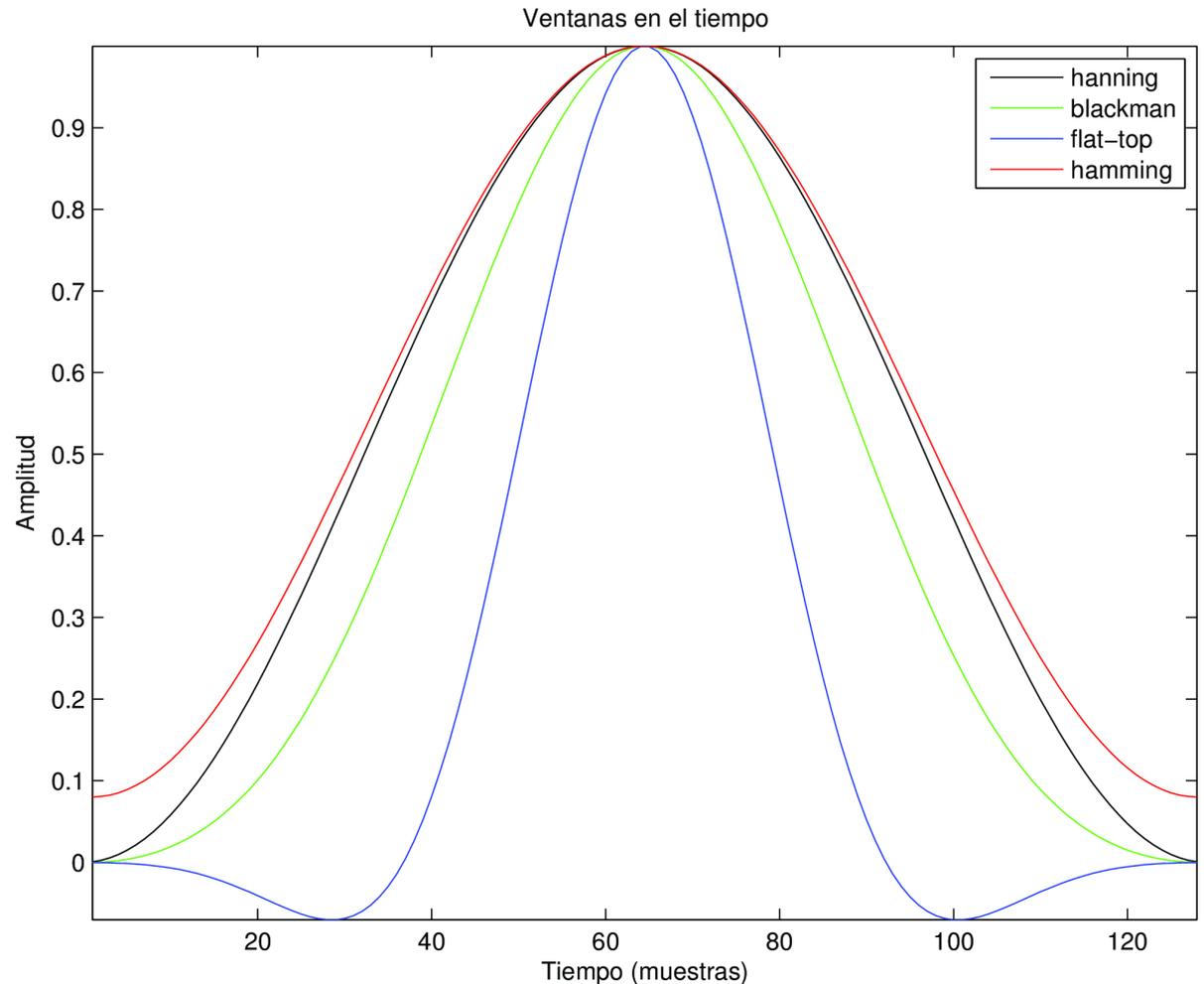
$$v(n) = a_0 - a_1 \cos(2\pi n/N) + a_2 \cos(4\pi n/N)$$

con $a_0 = 0.42$, $a_1 = 0.5$,
 $a_2 = 0.08$

- Flat-top:

$$v(n) = a_0 - a_1 \cos(2\pi n/N) + a_2 \cos(4\pi n/N) - a_3 \cos(6\pi n/N) + a_4 \cos(8\pi n/N)$$

con $a_0 = 0.22$, $a_1 = 0.42$,
 $a_3 = 0.28$, $a_4 = 0.08$,
 $a_4 = 0.01$



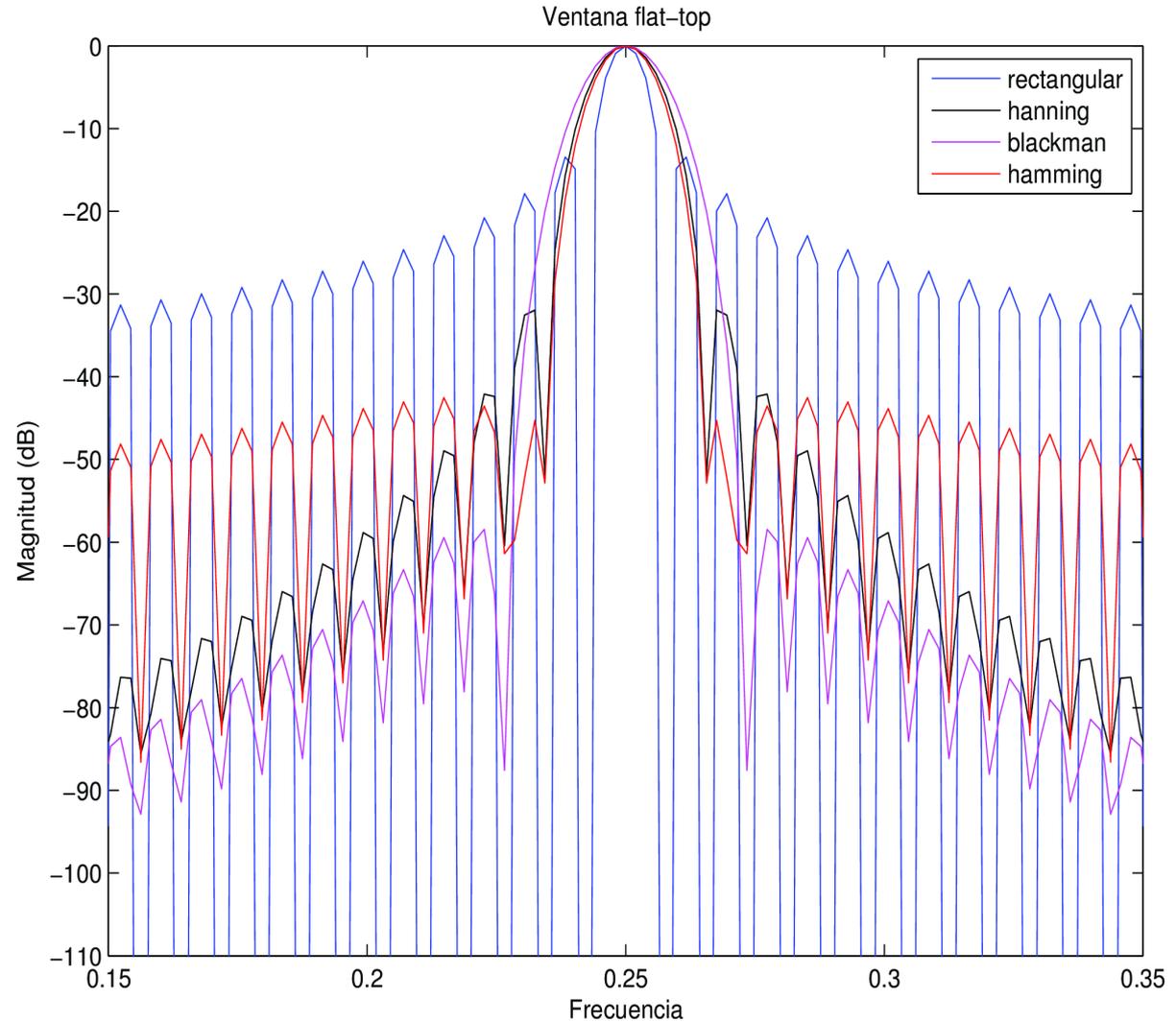
Comparación de ventanas en el tiempo:
Hanning, Blackman, Flat-Top y Hamming

Efecto de la ventana

Elección de la ventana:

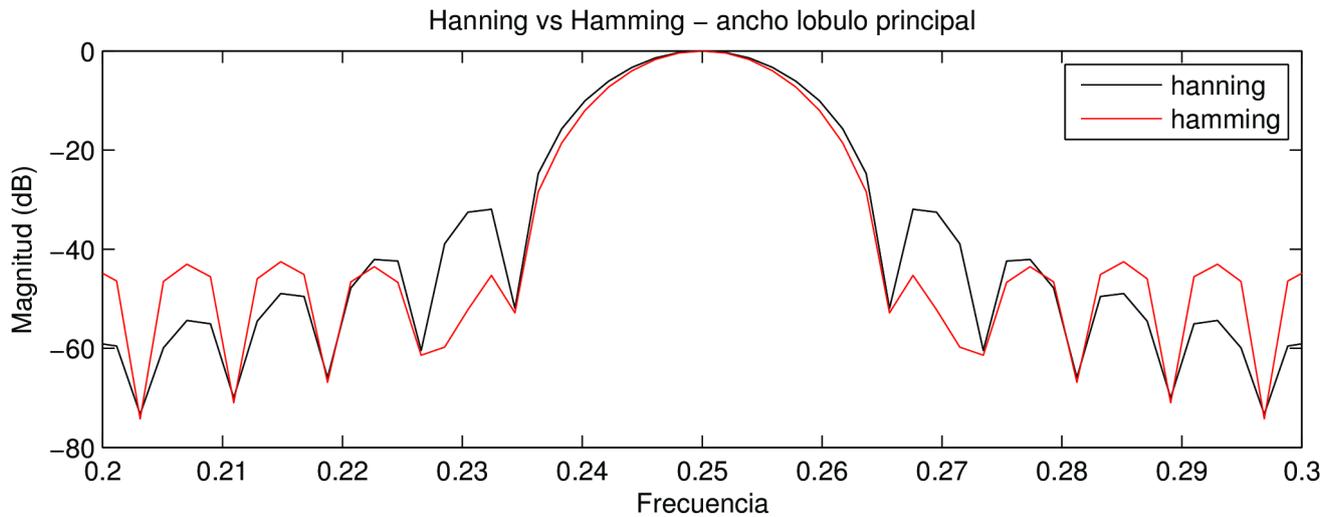
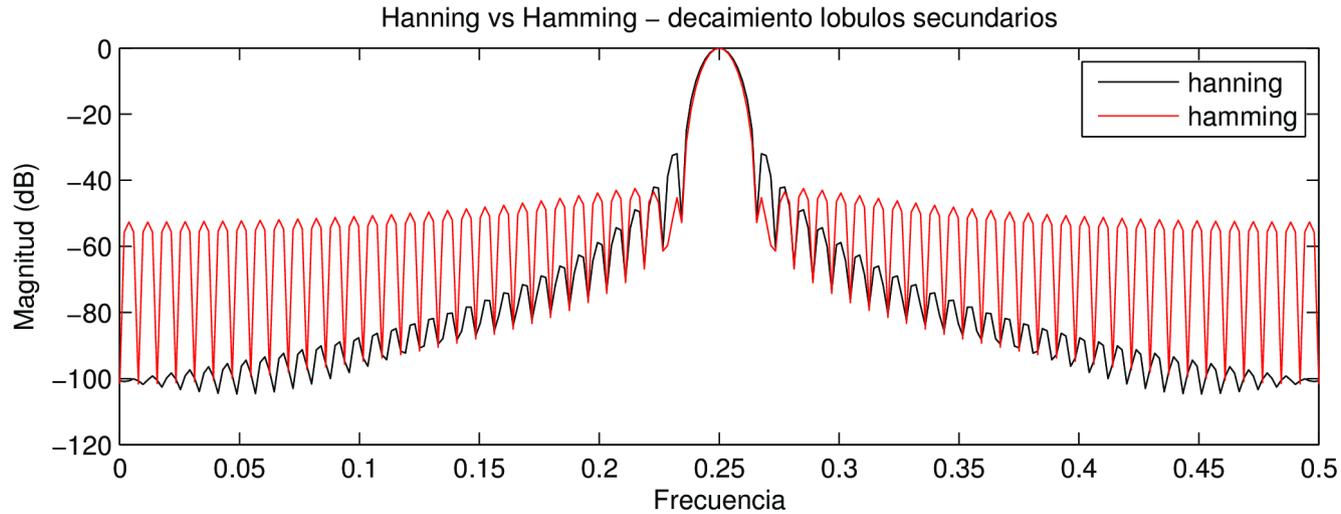
	Ancho lóbulo principal (aproximado)	Amplitud 1er lóbulo secundario (dB)
Rectangular	$4\pi/(N + 1)$	-13
Hann	$8\pi/N$	-31
Hamming	$8\pi/N$	-41
Blackman	$12\pi/N$	-57

Ancho del lóbulo principal (resolución) depende del largo de la ventana.



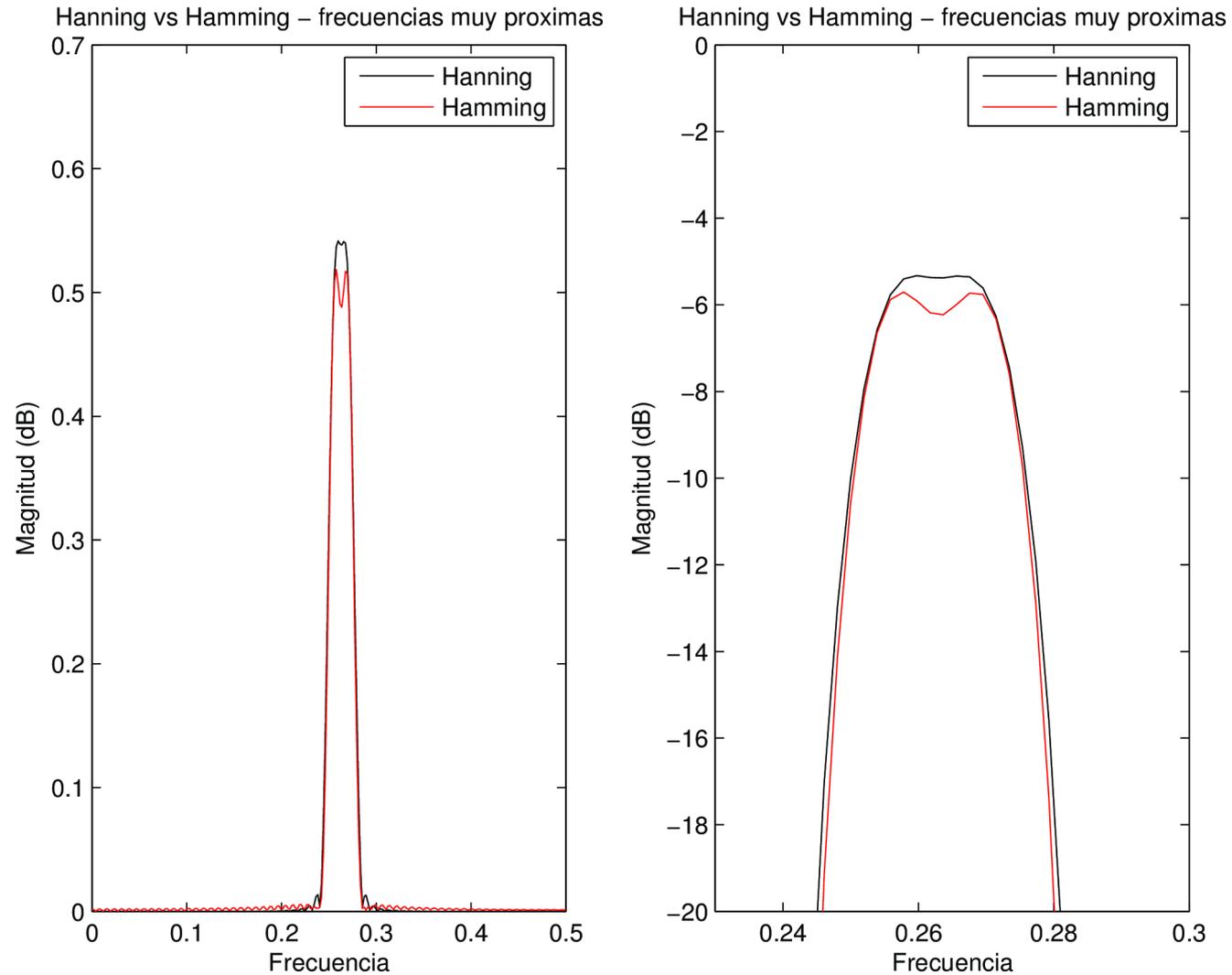
Comparación de ventanas en frecuencia: Rectangular, Hanning, Blackman, y Hamming

Efecto de la ventana



Comparación entre ventana Hanning (o Hann) y Hamming

Efecto de la ventana



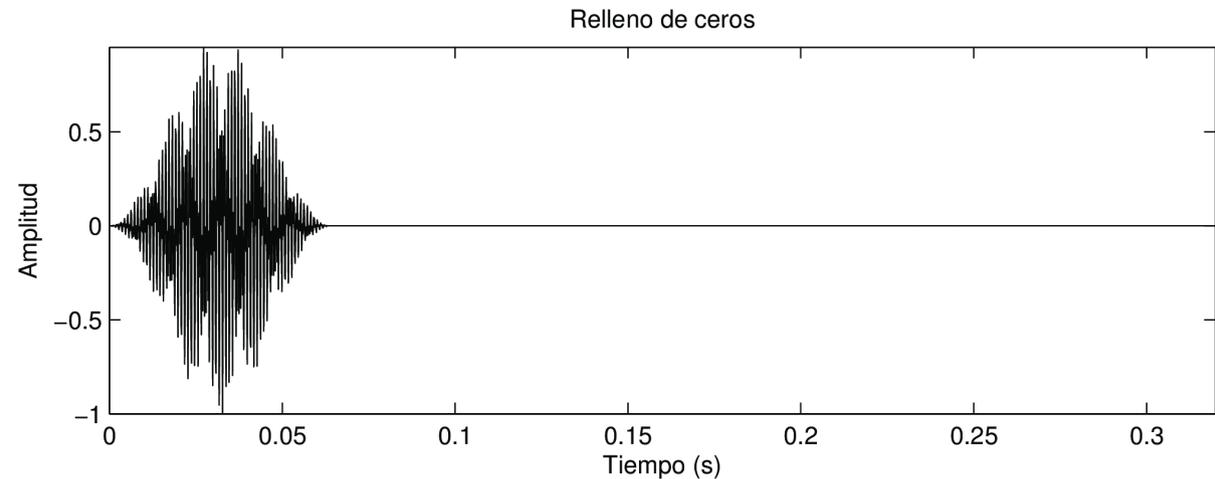
Comparación entre ventana Hanning (o Hann) y Hamming

Relleno de ceros

Considerar además de las muestras dadas por el enventanado, una cierta cantidad de muestras nulas

Corresponde a un muestreo más denso del espectro continuo

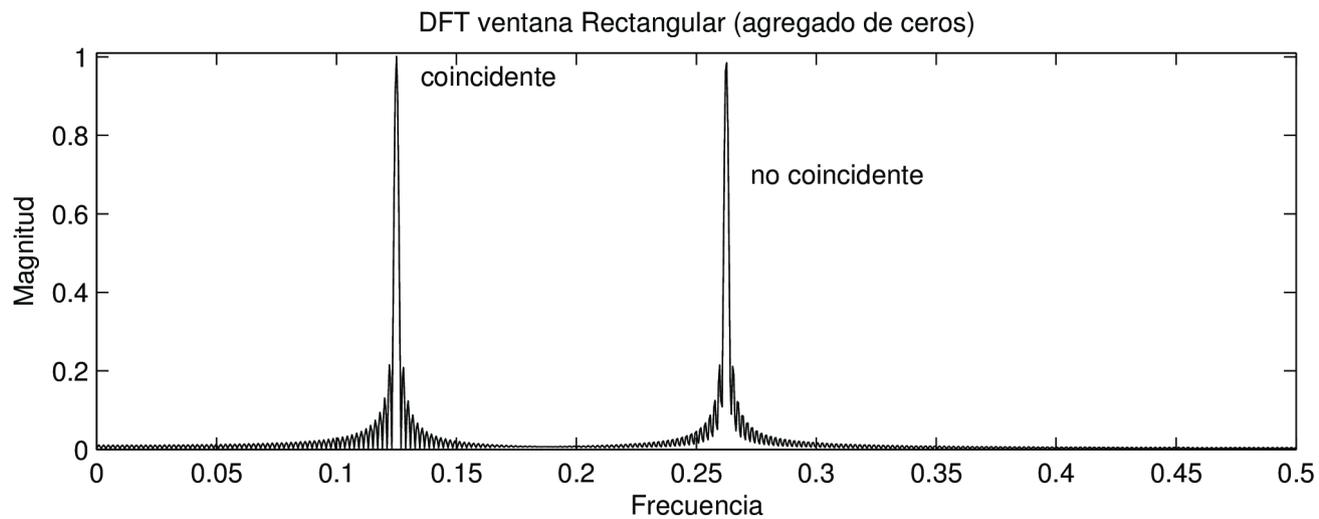
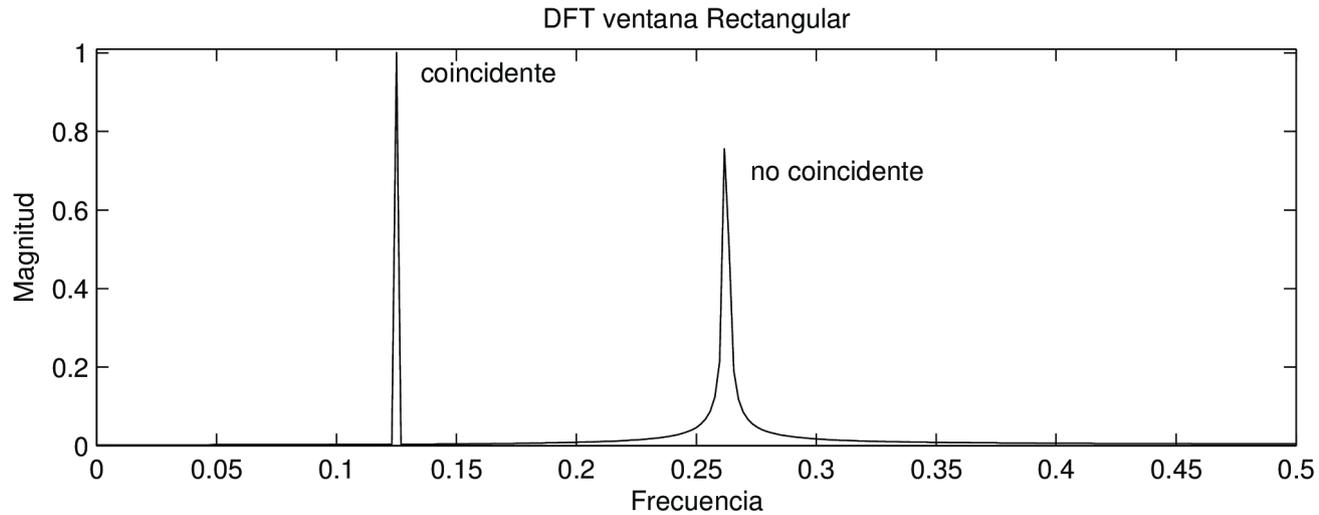
Equivale a una interpolación de valores en frecuencia usando las muestras no nulas de la señal, ya que las muestras nulas no intervienen en el cálculo de la DFT



$$\operatorname{Re} X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi k n / N)$$

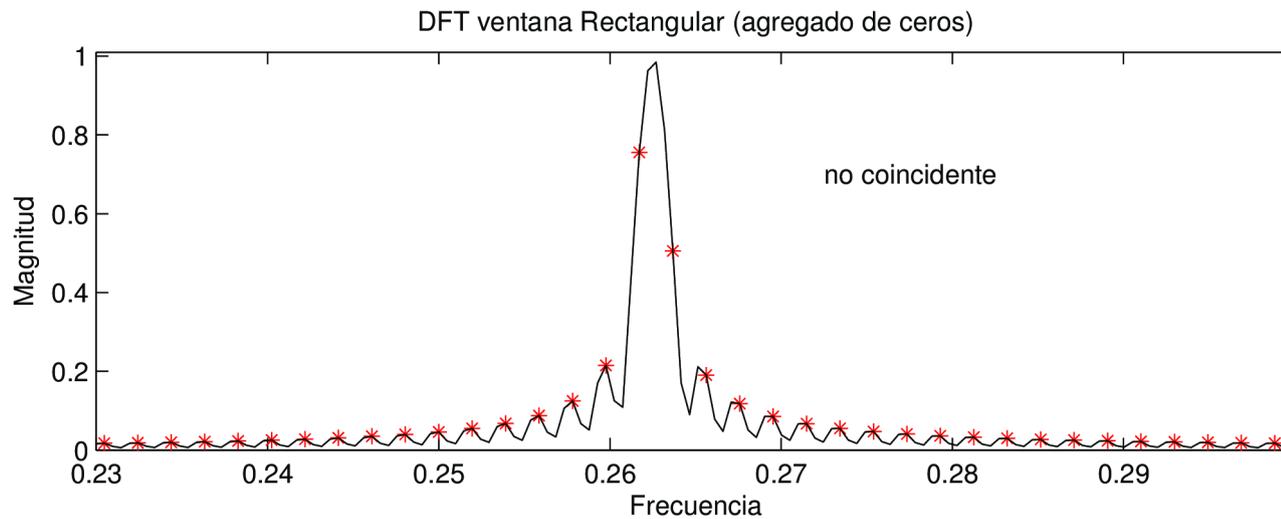
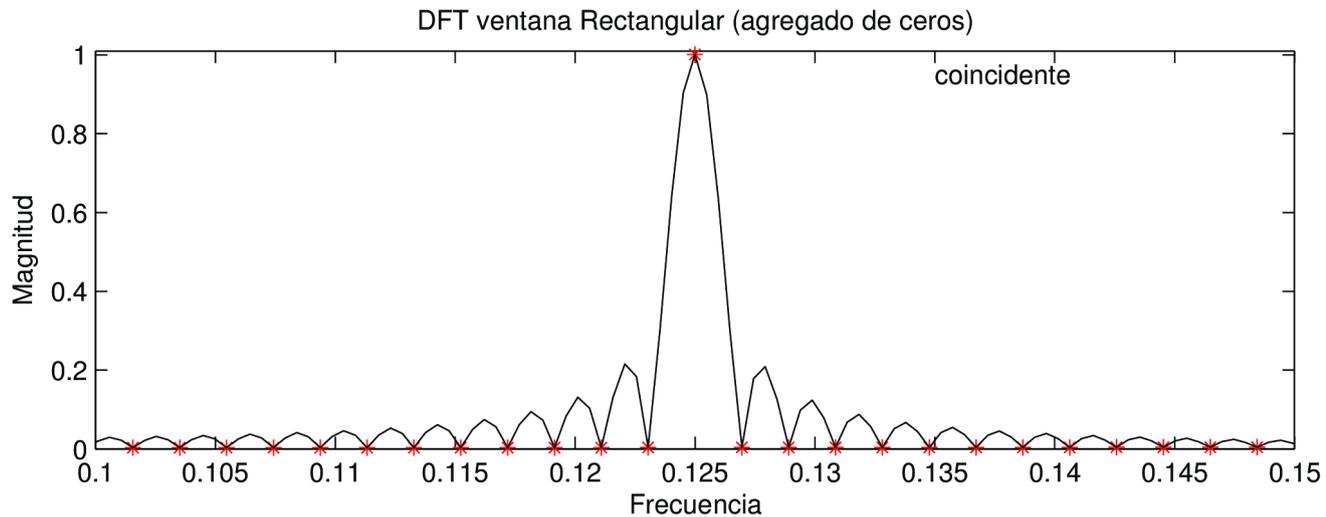
$$\operatorname{Im} X[k] = - \sum_{i=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi k n / N)$$

Relleno de ceros



Comparación de espectro de sinusoides al agregar relleno de ceros

Relleno de ceros

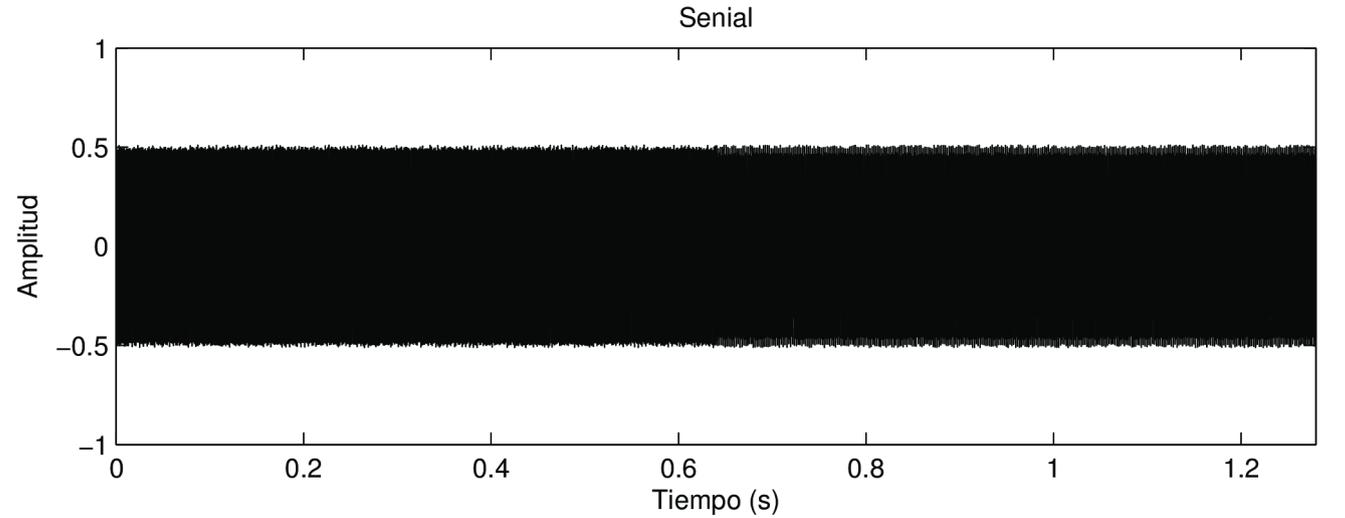


Comparación de espectro de sinusoides al agregar relleno de ceros

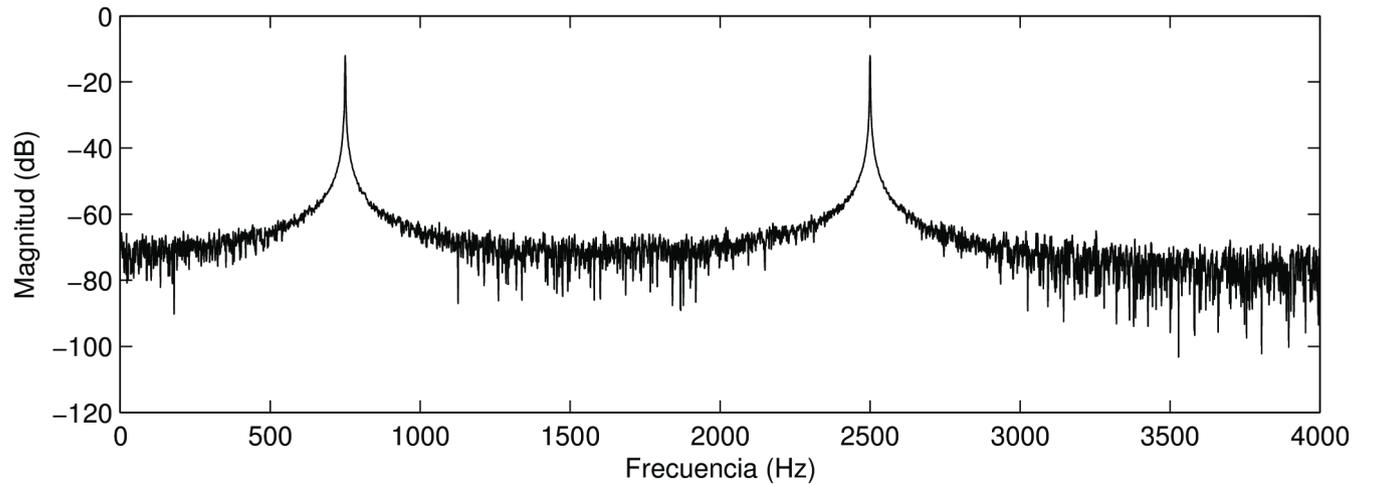
Análisis espectral de señales

Ejemplo:

Señal a analizar



DFT usando todas las muestras de la señal



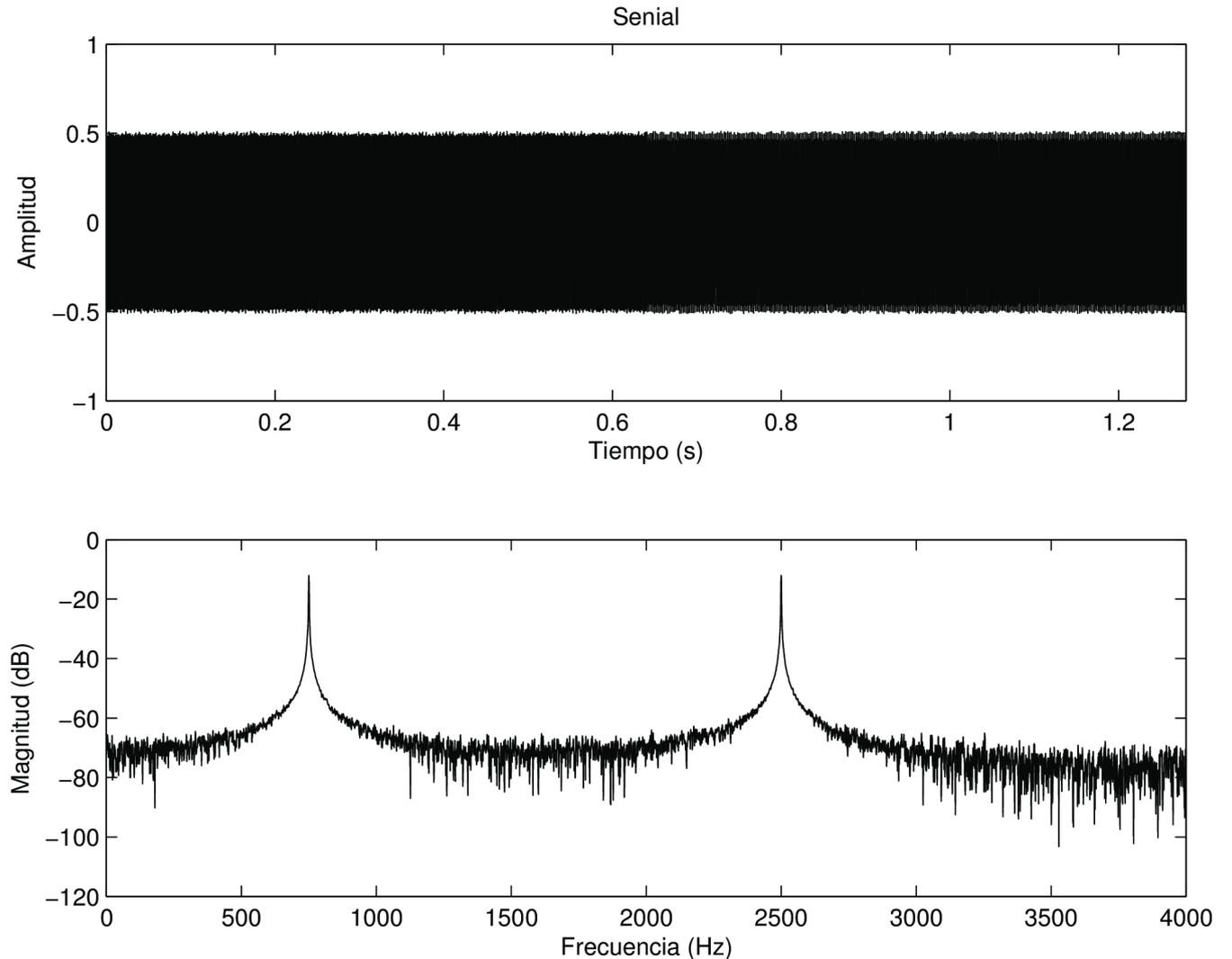
Análisis espectral de señales

Ejemplo:

Señal a analizar

Pero la señal
consiste en dos
tonos uno después
de otro (bajo ruido
blanco)

El espectro
obtenido es un
promedio de las
características
espectrales de una
señal que no es
estacionaria



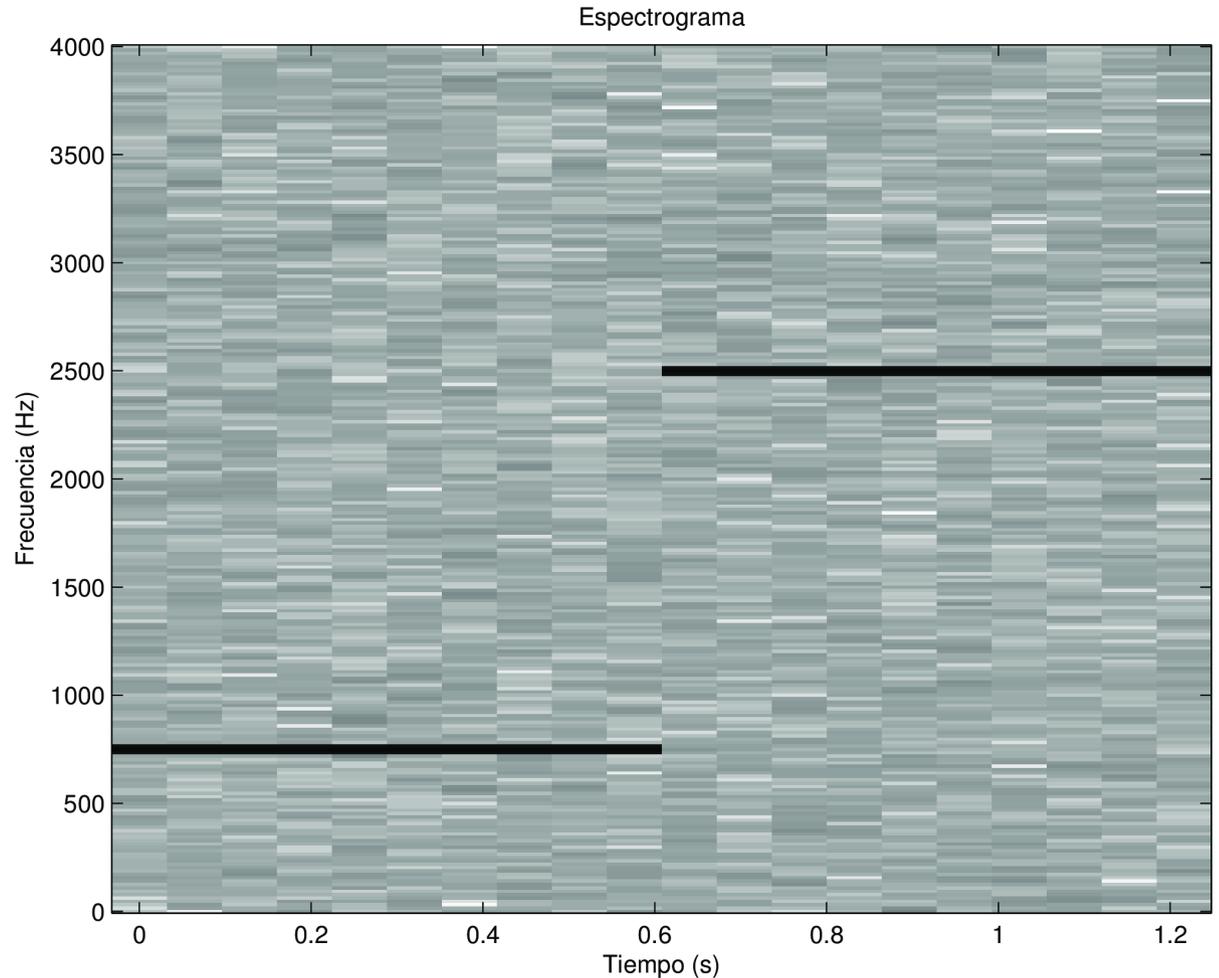
Análisis espectral de señales

Solución?

Apilar transformadas sucesivas de pocas muestras

Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT)

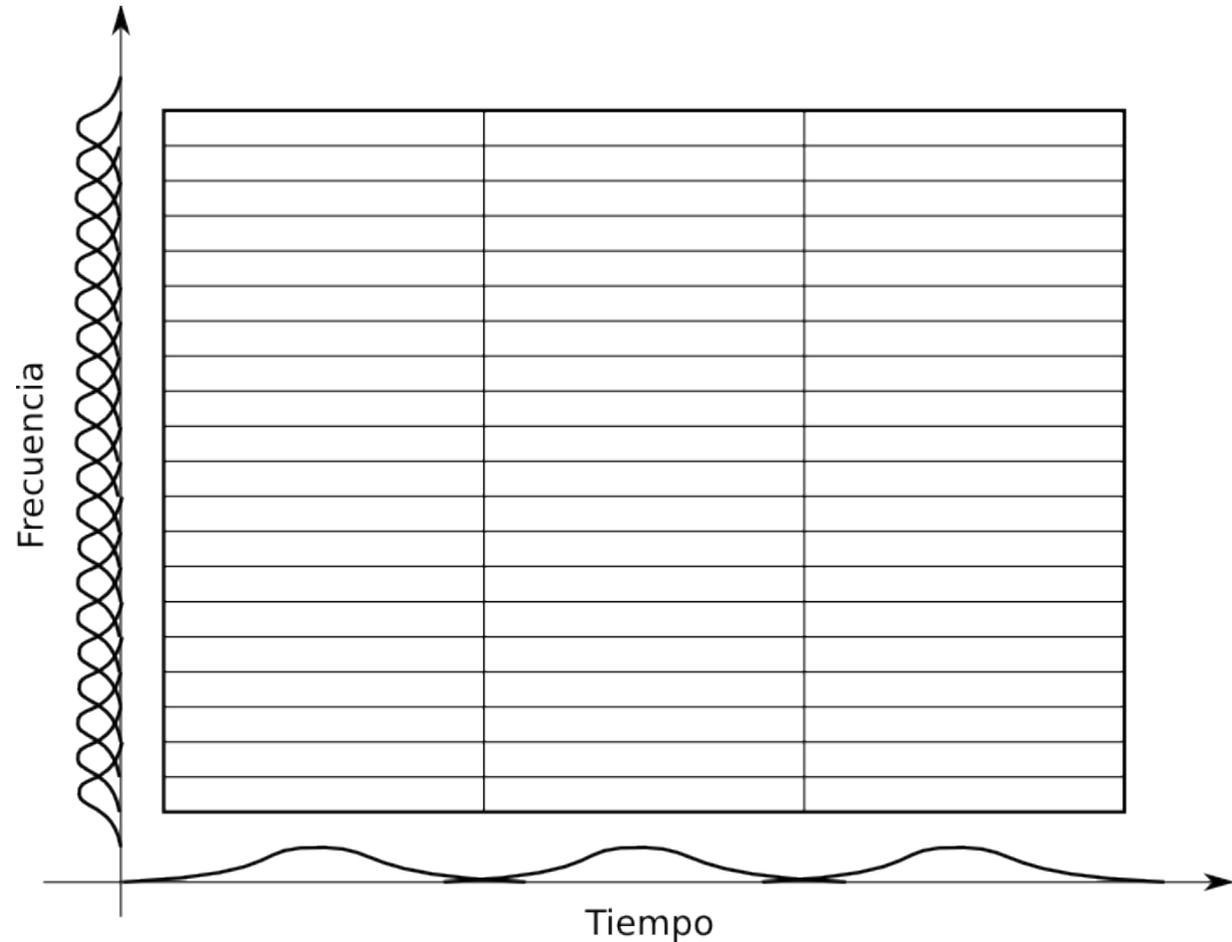
Espectrograma: módulo de la STFT



Transformada de Fourier de Tiempo Corto

Largo del bloque de análisis (N):

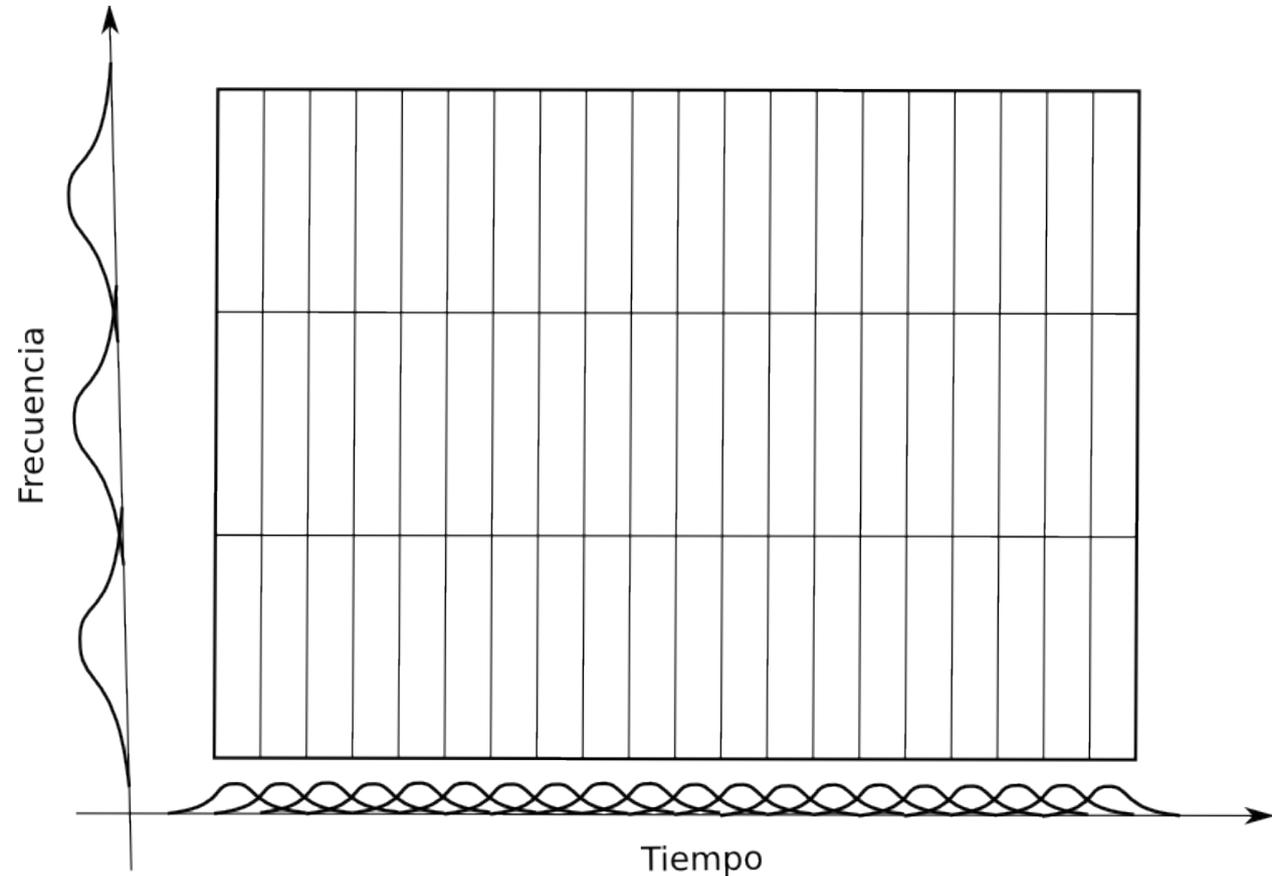
- Bloques largos: buena resolución en frecuencia pero baja resolución en el tiempo.



Transformada de Fourier de Tiempo Corto

Largo del bloque de análisis (N):

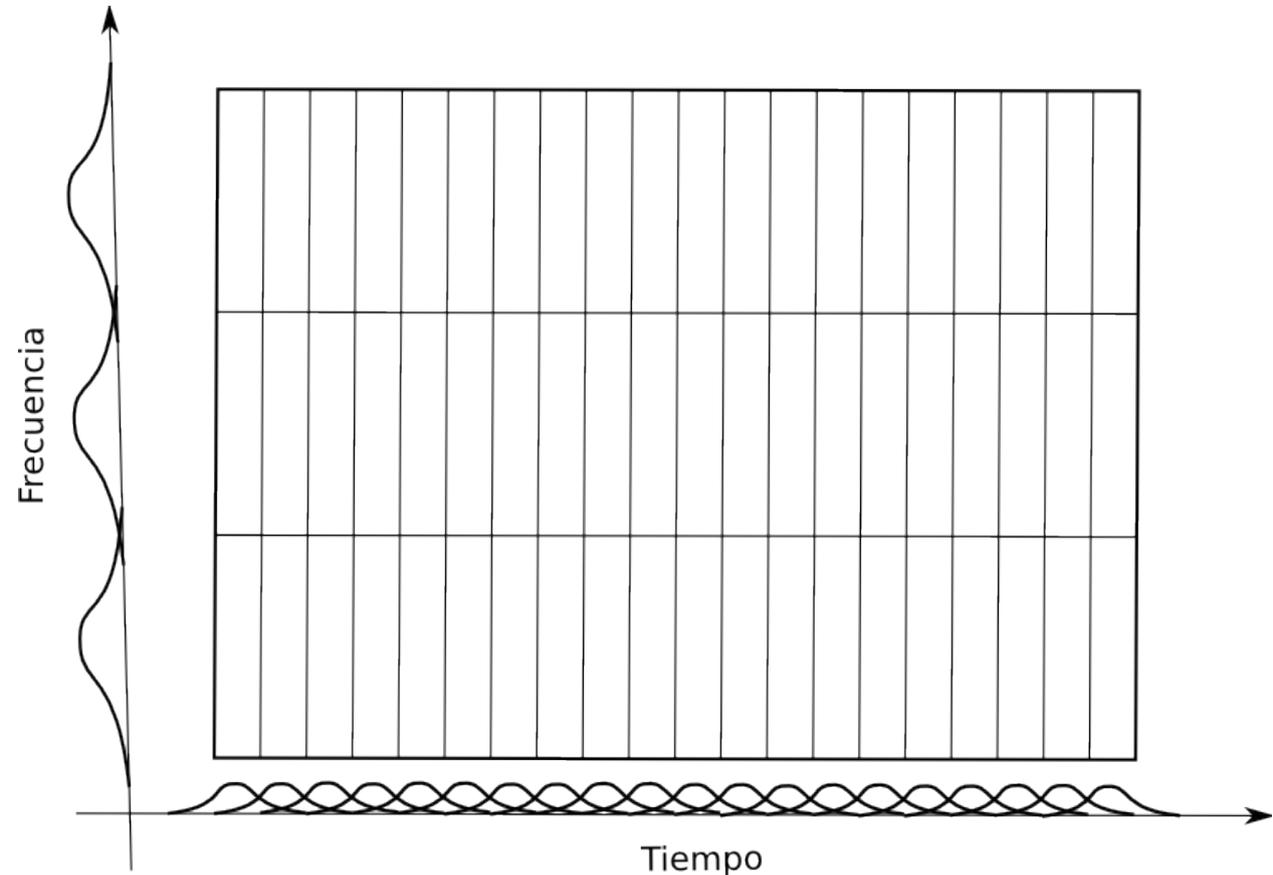
- Bloques largos: buena resolución en frecuencia pero baja resolución en el tiempo.
- Bloques cortos: buena resolución en el tiempo pero baja resolución de frecuencia.



Transformada de Fourier de Tiempo Corto

Largo del bloque de análisis (N):

- Bloques largos: buena resolución en frecuencia pero baja resolución en el tiempo.
- Bloques cortos: buena resolución en el tiempo pero baja resolución de frecuencia.

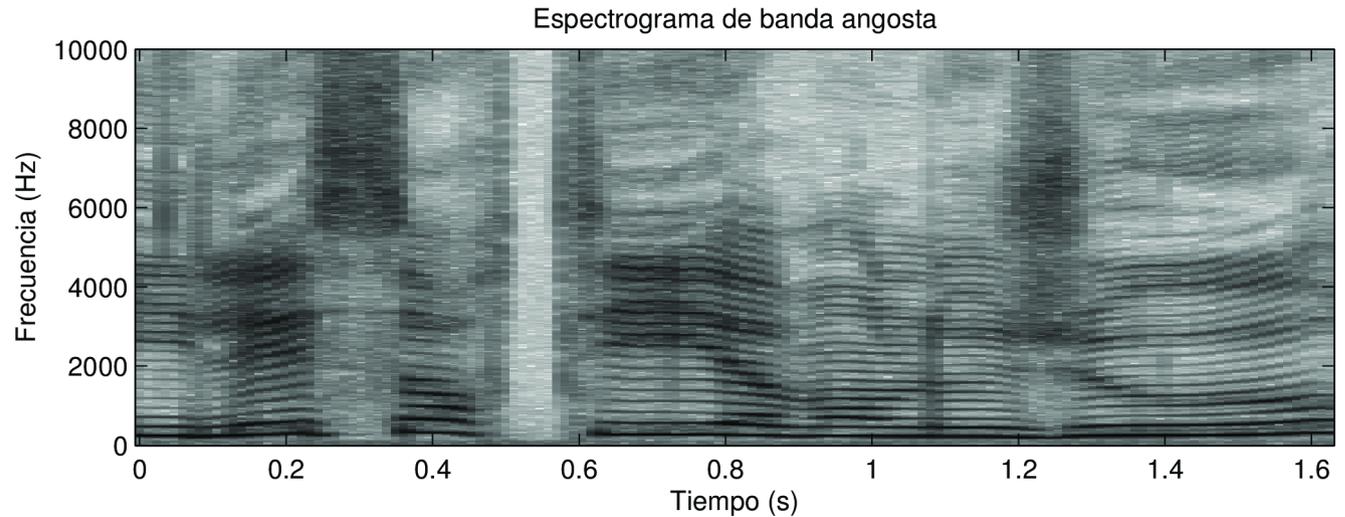


Para aumentar la resolución temporal manteniendo buena resolución en frecuencia se suelen considerar **bloques consecutivos solapados** cierto tiempo (e.g 50 o 75%).

Transformada de Fourier de Tiempo Corto

Esto da lugar a:

- Espectrograma de banda angosta (bloque largo)



- Espectrograma de banda ancha (bloque corto)

