

Introducción a la Teoría del Procesamiento Digital de Señales de Audio

Transformada de Fourier Discreta

Resumen

Propiedades de la Transformada de Fourier

Linealidad

Comportamiento de la fase

Naturaleza periódica de la DFT

La Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Relación de Parseval

Pares de transformadas

Efecto de Gibbs

Linealidad de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es **lineal**, por lo que posee las propiedades de: **homogeneidad** y **aditividad**.

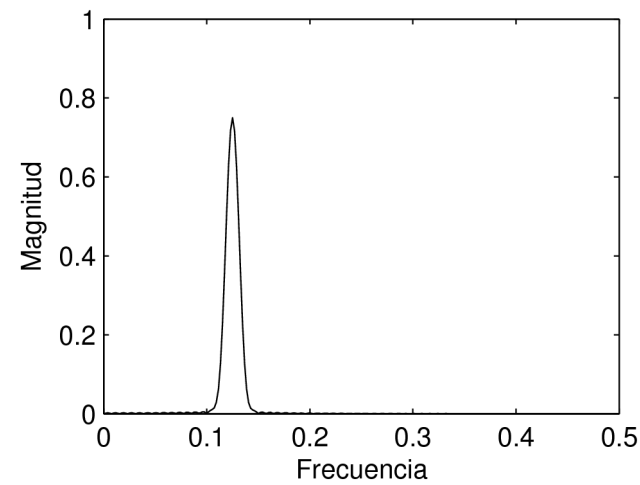
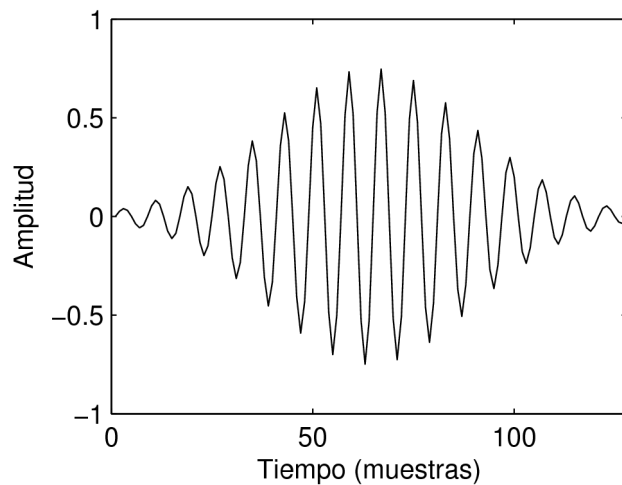
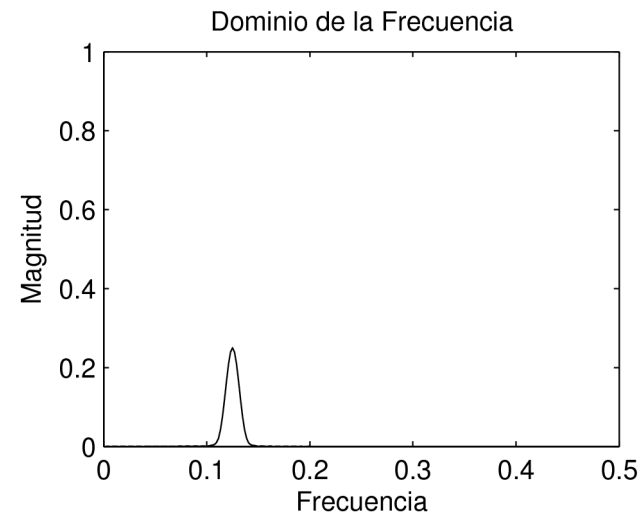
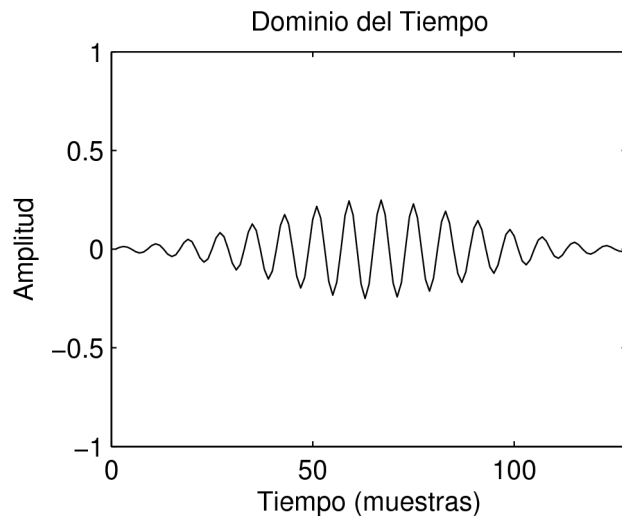
La homogeneidad consiste en que un cambio de amplitud en un dominio produce un cambio idéntico de amplitud en el otro dominio:

$$\begin{aligned}x[n] &\leftrightarrow X[k] \\ k x[n] &\leftrightarrow k X[k]\end{aligned}$$

En notación rectangular parte real e imaginaria se multiplican por k , en notación polar la magnitud se multiplica por k y la fase permanece incambiada.

Linealidad de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es **lineal**, por lo que posee las propiedades de: **homogeneidad** y **aditividad**.



Linealidad de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es **lineal**, por lo que posee las propiedades de: **homogeneidad** y **aditividad**.

La aditividad consiste en que la suma en un dominio corresponde a la suma en el otro dominio:

$$\begin{aligned}x_1[n] &\leftrightarrow X_1[k] \\x_2[n] &\leftrightarrow X_2[k] \\x_3[n] &\leftrightarrow X_3[k] \\x_1[n] + x_2[n] = x_3[n] &\leftrightarrow X_1[k] + X_2[k] = X_3[k]\end{aligned}$$

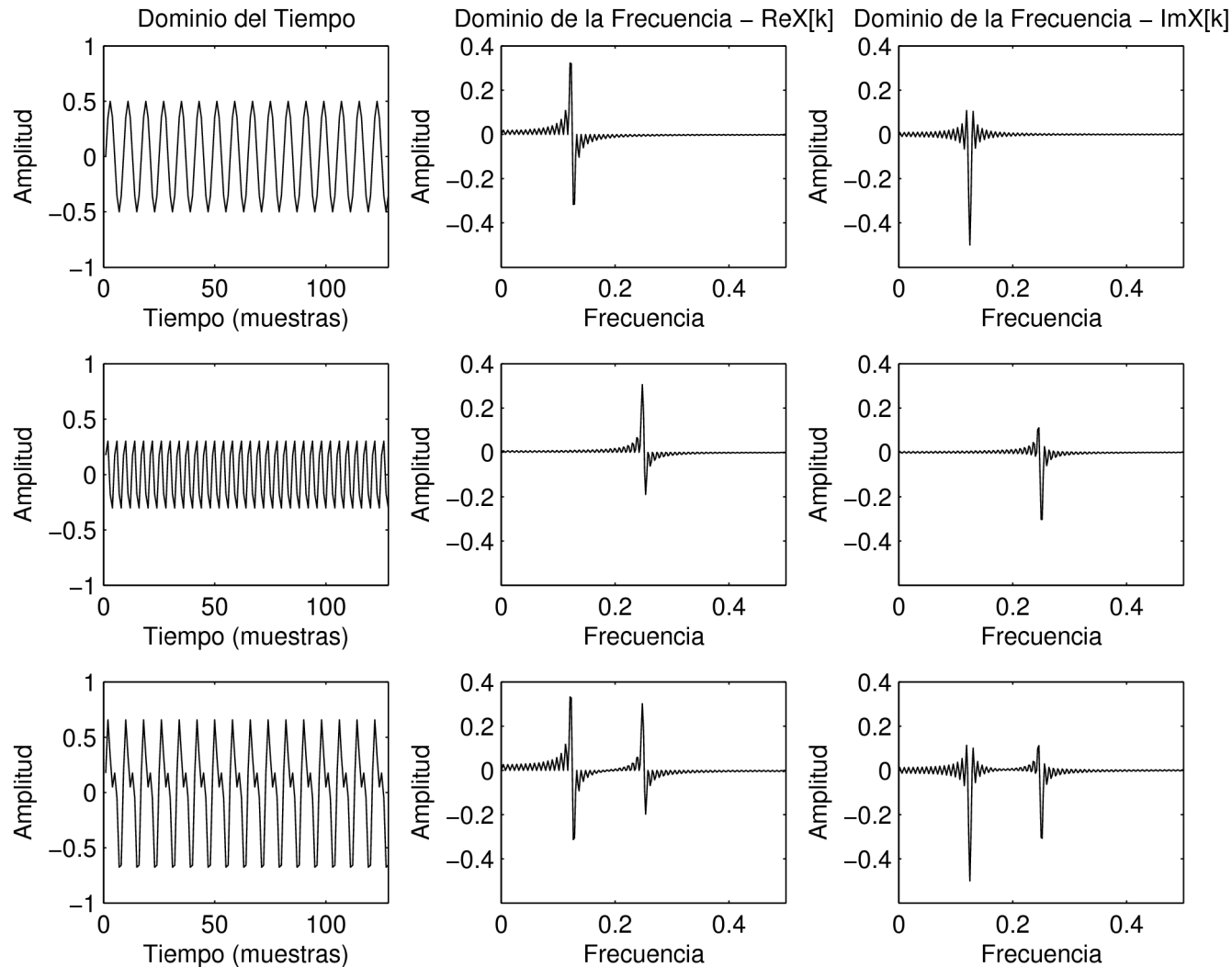
En notación rectangular se suman parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}X_1[k] + \operatorname{Re}X_2[k] &= \operatorname{Re}X_3[k] \\ \operatorname{Im}X_1[k] + \operatorname{Im}X_2[k] &= \operatorname{Im}X_3[k]\end{aligned}$$

En notación polar no pueden sumarse directamente los espectros.

Linealidad de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es **lineal**, por lo que posee las propiedades de: **homogeneidad** y **aditividad**.



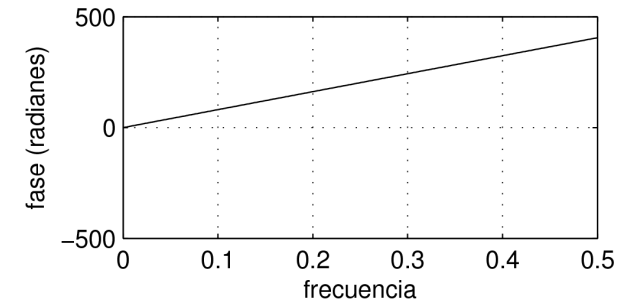
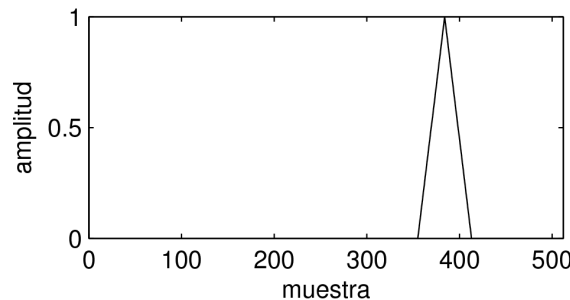
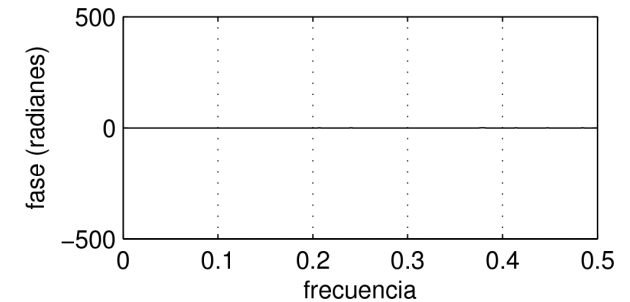
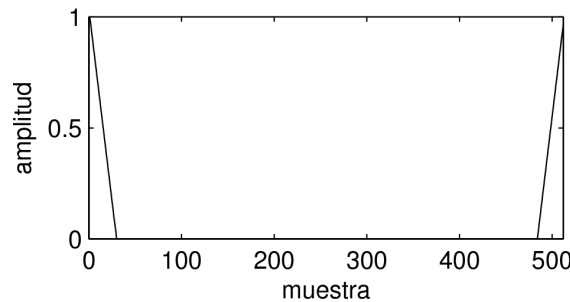
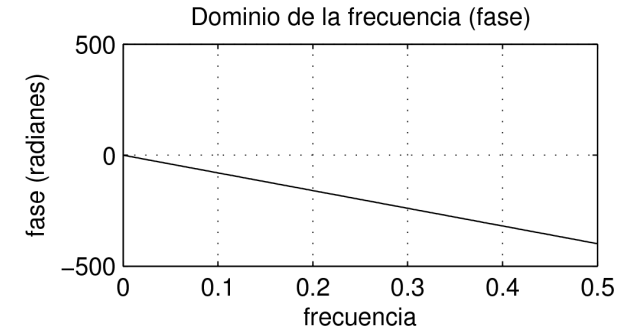
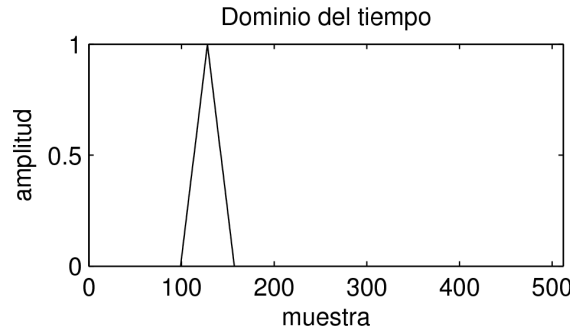
Comportamiento de la fase

A pesar de ser lineal la Transformada de Fourier no es invariante a corrimientos.

$$x[n] \leftrightarrow \text{MagX}[k] \ \& \ \text{FaseX}[k]$$

$$x[n + s] \leftrightarrow \text{MagX}[k] \ \& \ \text{FaseX}[k] + 2\pi s f$$

La magnitud no cambia y a la fase se le suma un término lineal: $2\pi s f$



Un desplazamiento hacia la **derecha** de la onda produce un **decremento** de la pendiente y un corrimiento hacia la **izquierda** produce un **incremento**.

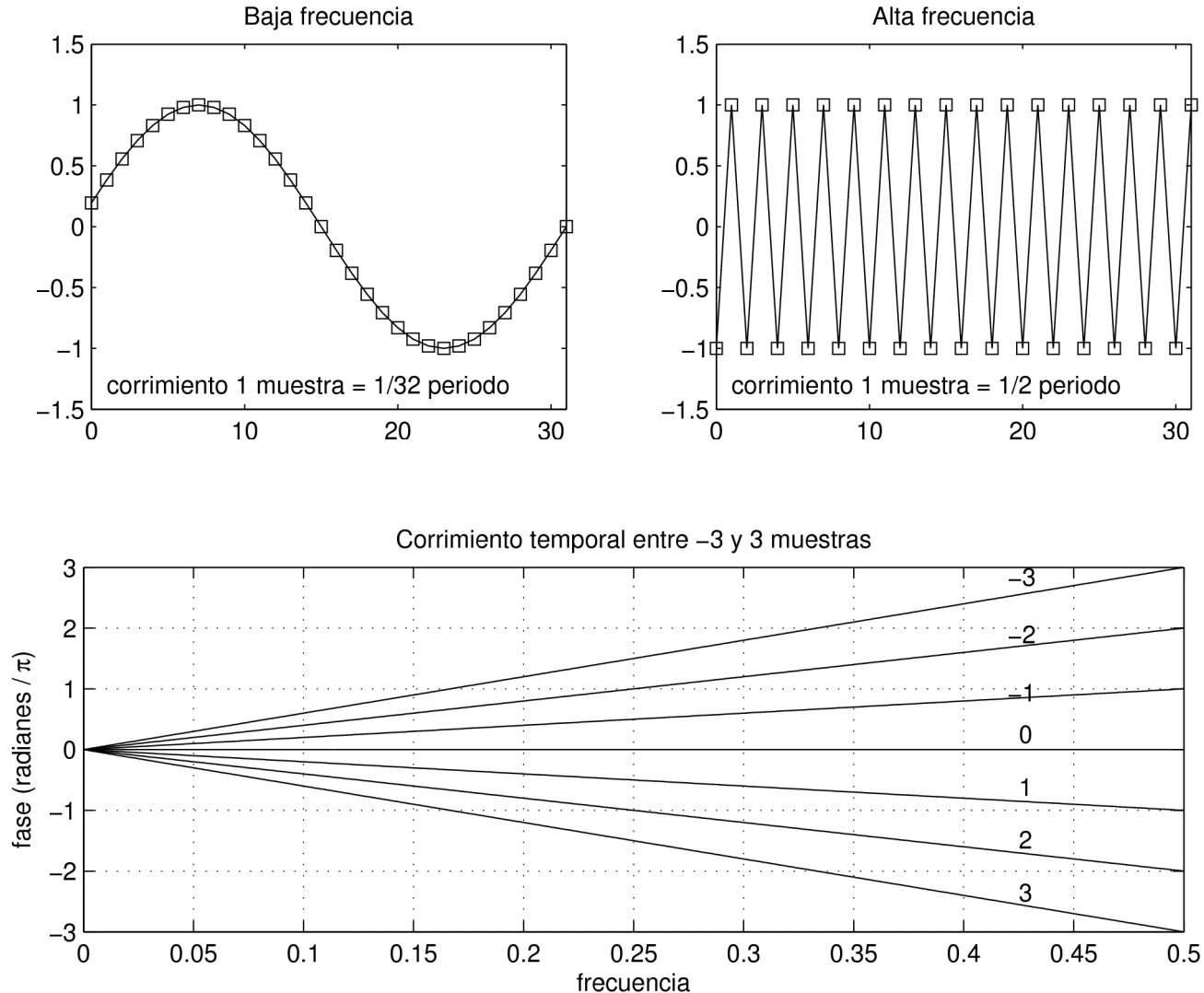
Comportamiento de la fase

Consideremos un desplazamiento de una muestra:

En una señal de baja frecuencia el corrimiento es pequeño en relación al período, por lo que produce un cambio de fase pequeño.

En una señal de alta frecuencia se produce un cambio de fase grande.

Por lo tanto el cambio de fase es proporcional a la frecuencia ($2\pi sf$).



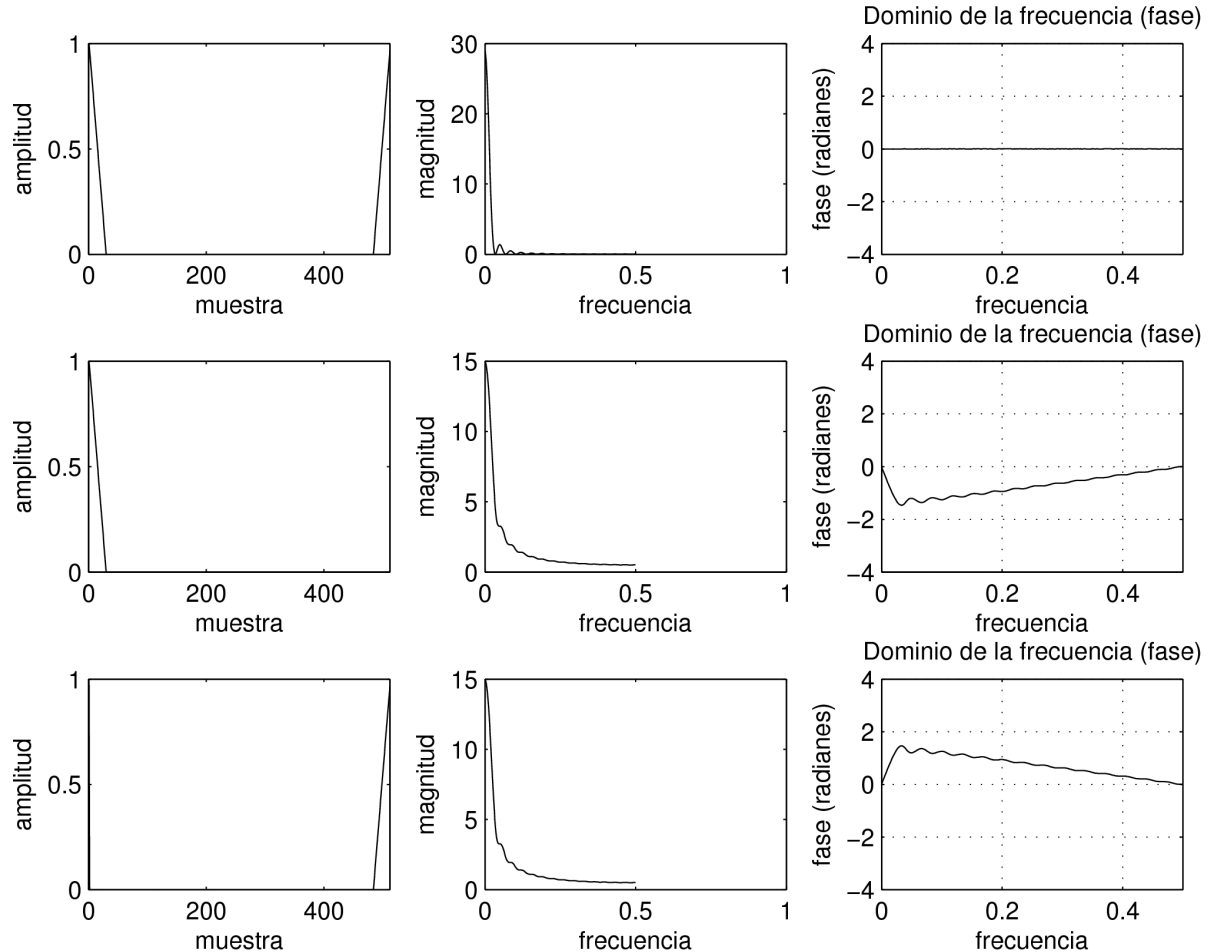
Comportamiento de la fase

La simetría de la señal en el tiempo corresponde a fase 0 (o fase lineal).

Una señal simétrica puede descomponerse en dos partes idénticas pero espejadas.

La magnitud de cada una de ellas es igual, pero la fase tendrá signo inverso.

Esto produce que se cancele la contribución de fase de cada muestra.



Toda señal simétrica tiene fase lineal.

Comportamiento de la fase

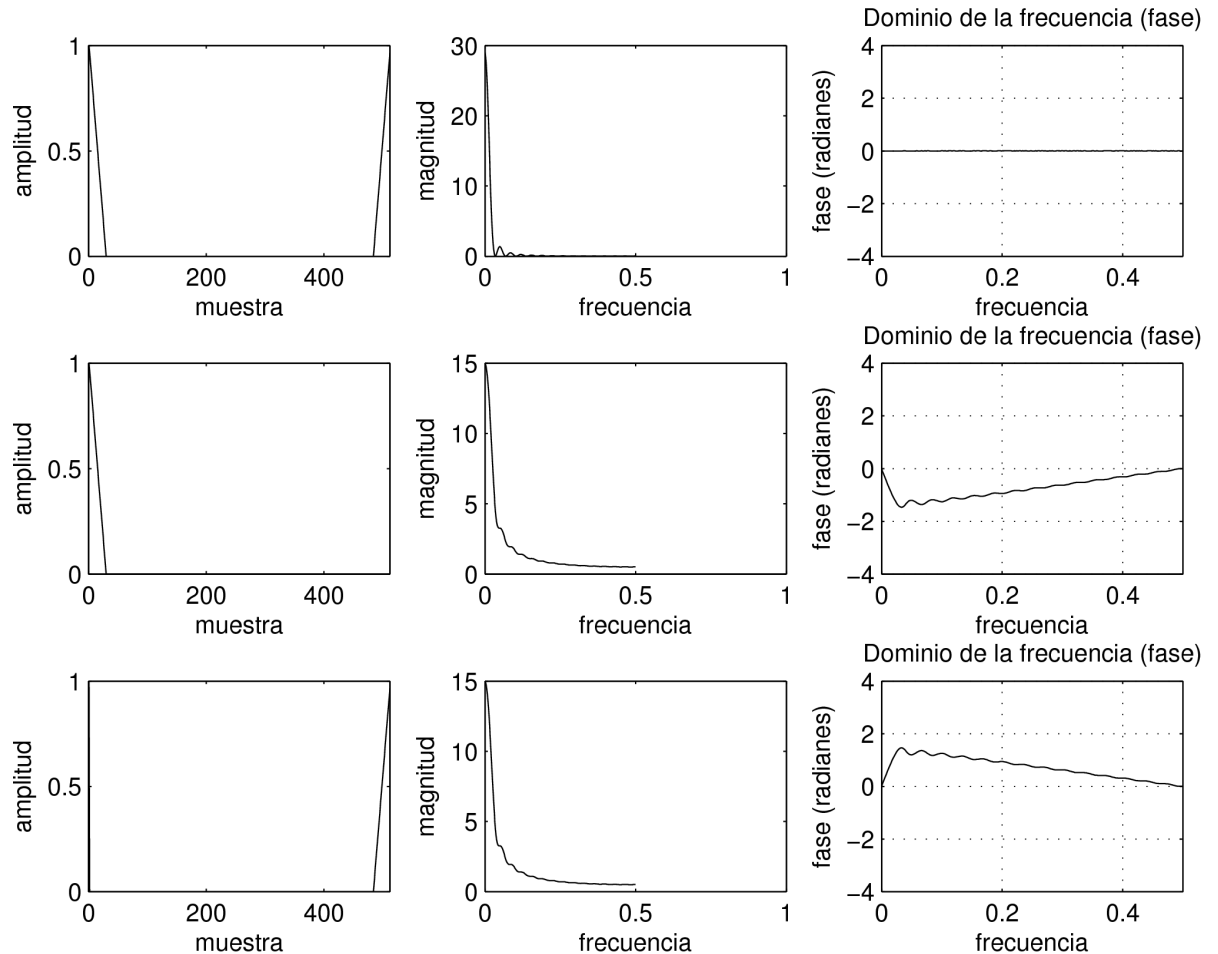
También observamos que dar vuelta una señal en el tiempo corresponde a cambiar el signo de la fase.

Del mismo modo, cambiar el signo de la fase produce que la señal se de vuelta.

Cambiar la fase de un complejo es conjugarlo y se anota como:

$$X[f] = \text{MagX}[f] \ \& \ \text{FaseX}[f]$$
$$X^*[f] = \text{MagX}[f] \ \& \ -\text{FaseX}[f]$$

$$X[f] = \text{ReX}[f] + \text{ImX}[f]$$
$$X^*[f] = \text{ReX}[f] - \text{ImX}[f]$$



Comportamiento de la fase

También observamos que dar vuelta una señal en el tiempo corresponde a cambiar el signo de la fase.

Del mismo modo, cambiar el signo de la fase produce que la señal se de vuelta.

Cambiar la fase de un complejo es conjugarlo y se anota como:

$$X[f] = \text{Mag}X[f] \ \& \ \text{Fase}X[f]$$
$$X^*[f] = \text{Mag}X[f] \ \& \ -\text{Fase}X[f]$$

$$X[f] = \text{Re}X[f] + \text{Im}X[f]$$
$$X^*[f] = \text{Re}X[f] - \text{Im}X[f]$$

Ejemplos:

$$x[n] \leftrightarrow X[k]$$
$$x[-n] \leftrightarrow X^*[k]$$

convolución

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X[k] \times Y[k]$$

correlación

$$x[n] * y[-n] \leftrightarrow X[k] \times Y^*[k]$$

Para obtener señal de fase cero, dado:

$$x[n] \leftrightarrow X[k]$$

multiplicar por espectro conjugado,

$$X[k] \times X^*[k]$$

ó convolucionar con la señal invertida

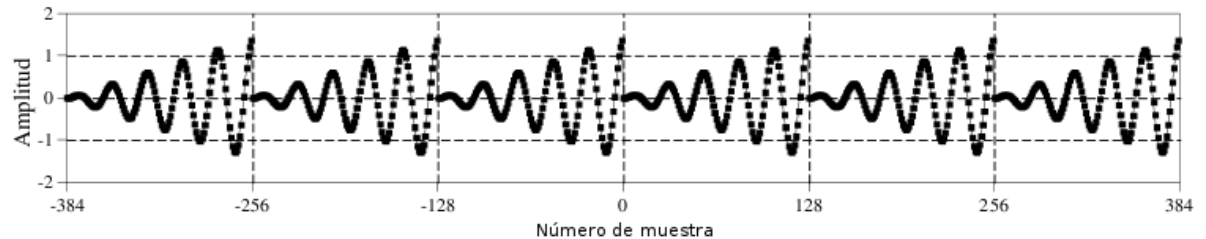
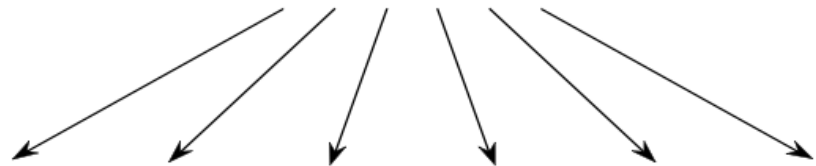
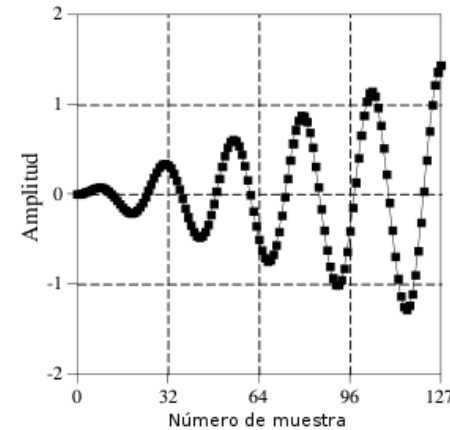
$$x[n] * x[-n]$$

Naturaleza periódica de la DFT

A diferencia de las demás Transformadas de Fourier en la DFT tanto el dominio del **tiempo** como el dominio de la **frecuencia** son **periódicos**.

La consecuencia más seria de la periodicidad en el tiempo es el **aliasing temporal**

Un ejemplo de aliasing en el tiempo es la convolución circular que ocurre al multiplicar espectros.

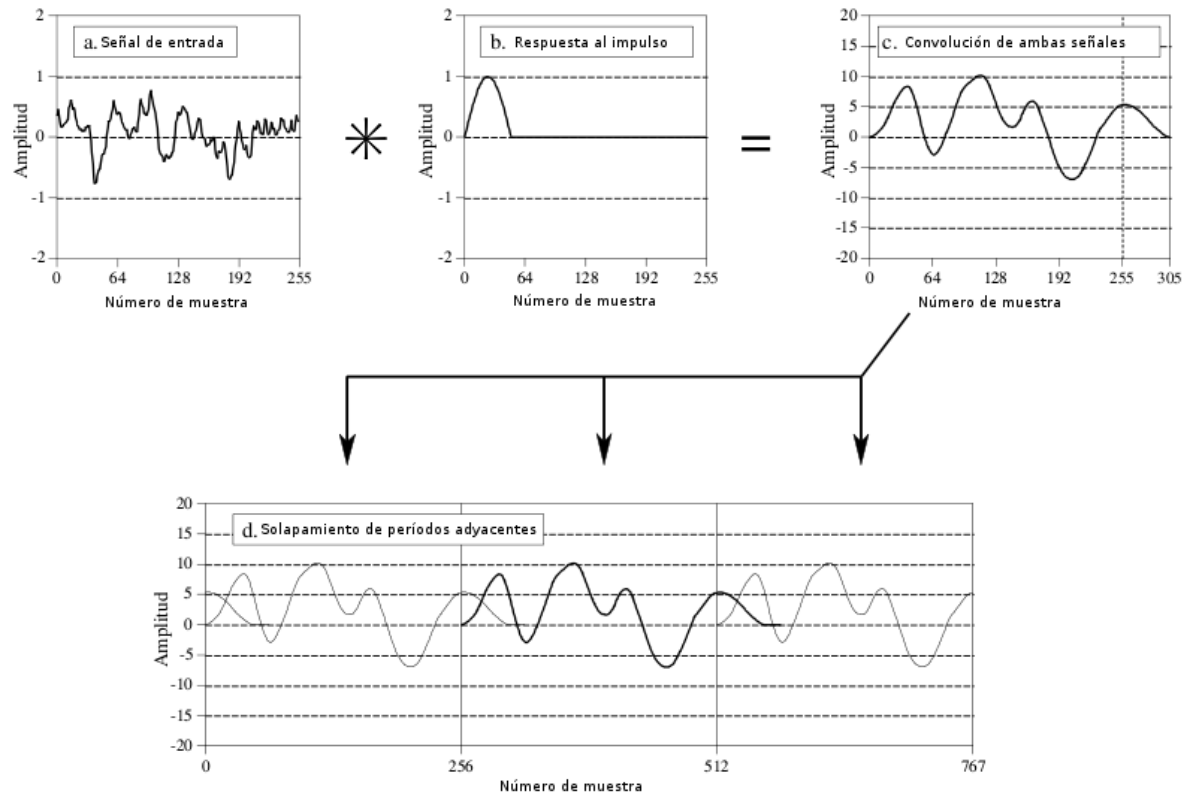


Naturaleza periódica de la DFT

A diferencia de las demás Transformadas de Fourier en la DFT tanto el dominio del **tiempo** como el dominio de la **frecuencia** son **periódicos**.

La consecuencia más seria de la periodicidad en el tiempo es el **aliasing temporal**

Un ejemplo de aliasing en el tiempo es la convolución circular que ocurre al multiplicar espectros.



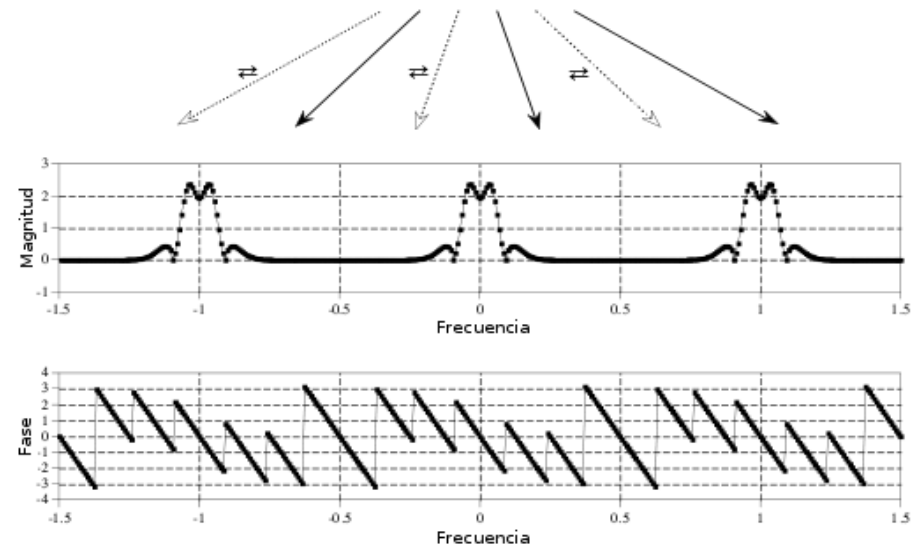
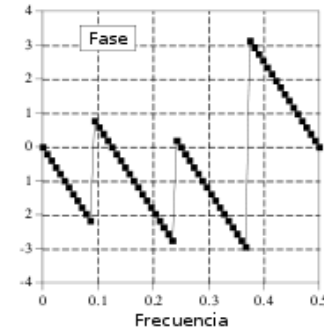
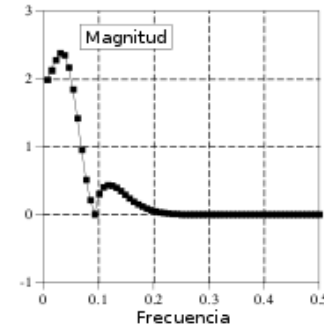
Naturaleza periódica de la DFT

El dominio de la **frecuencia** es también **periódico**.

El espectro entre 0 y 0.5 aparece espejado en las frecuencias negativas.

La magnitud tiene simetría par.
La fase tiene simetría impar.

Tomando en cuenta las frecuencias negativas el espectro se repite con período 1 (o fs).



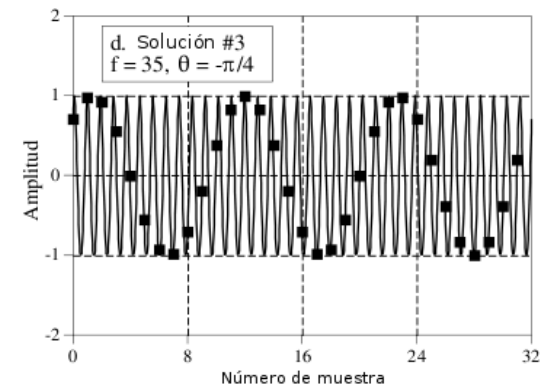
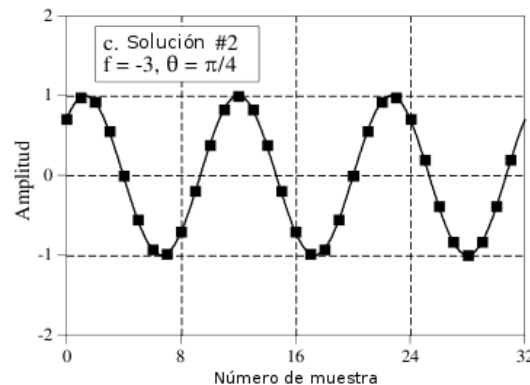
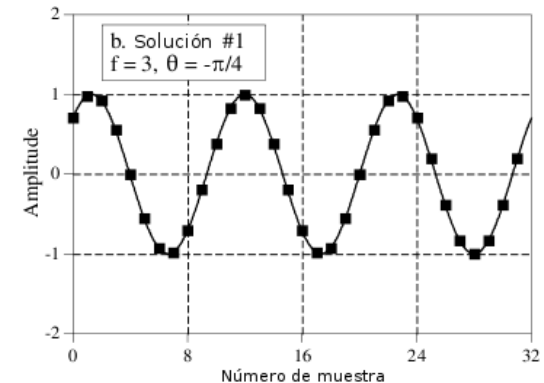
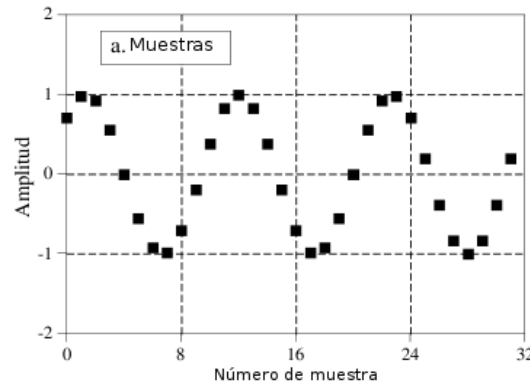
Naturaleza periódica de la DFT

¿Frecuencias negativas?
¿Frecuencias por encima de $f_s/2$?

Consideremos un conjunto de muestras discretas.

Supongamos que la señal es:
 $x[n] = \cos(2 \pi n f / N + \theta)$
y debemos determinar la frecuencia f y la fase θ .

- La primera solución corresponde a la porción positiva del espectro
- La segunda solución, a la porción de las frecuencias negativas.
- La última solución es en realidad una familia infinita de soluciones.



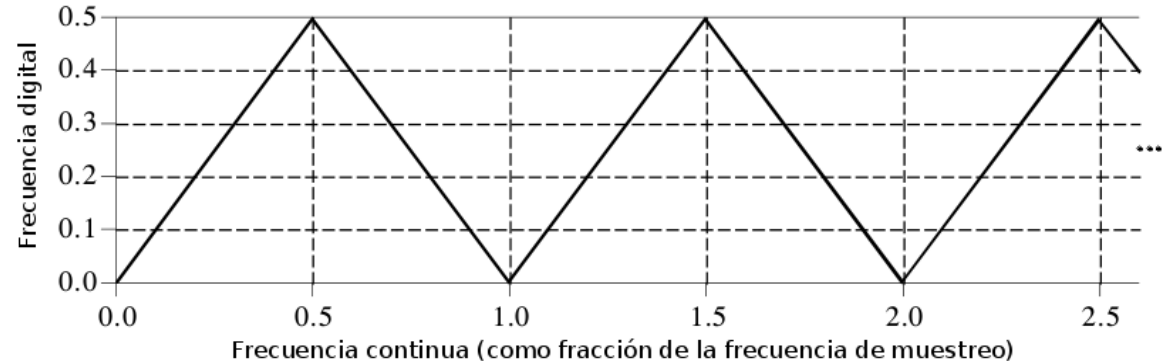
Naturaleza periódica de la DFT

Muchos fenómenos que ocurren en DSP sólo pueden comprenderse si se toma en cuenta la periodicidad del espectro.

Naturaleza periódica de la DFT

Muchos fenómenos que ocurren en DSP sólo pueden comprenderse si se toma en cuenta la periodicidad del espectro.

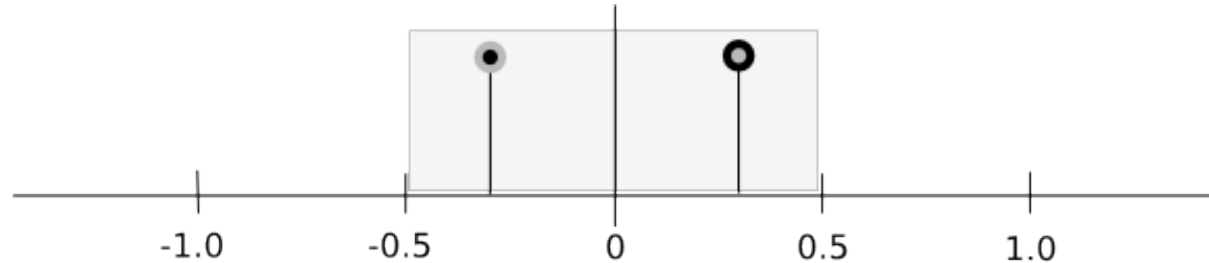
Por ejemplo el aliasing en el dominio de la frecuencia.



Naturaleza periódica de la DFT

Muchos fenómenos que ocurren en DSP sólo pueden comprenderse si se toma en cuenta la periodicidad del espectro.

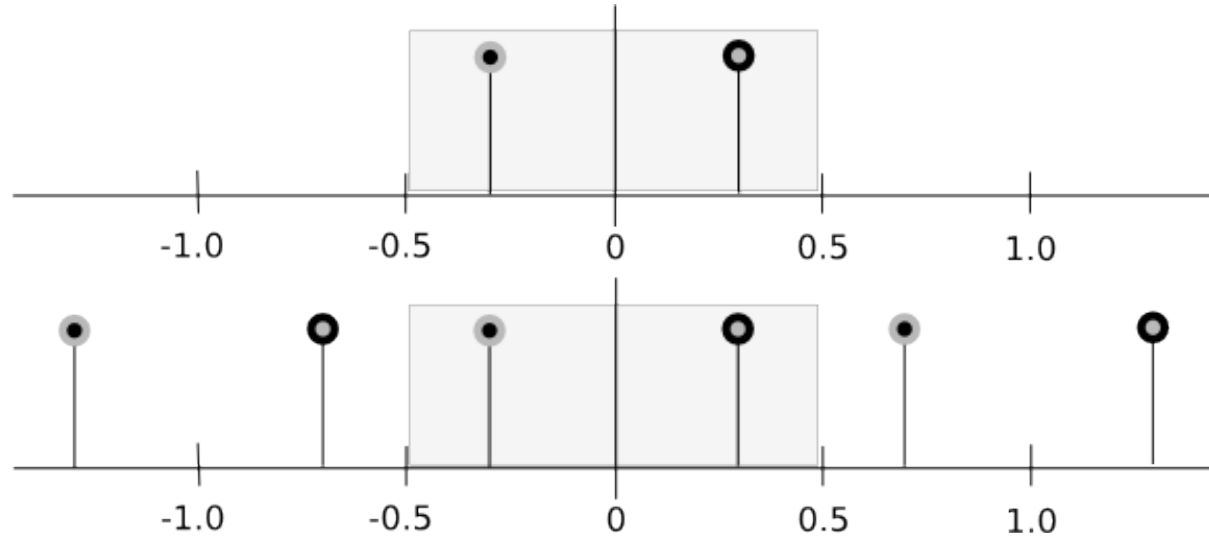
Por ejemplo el aliasing en el dominio de la frecuencia.



Naturaleza periódica de la DFT

Muchos fenómenos que ocurren en DSP sólo pueden comprenderse si se toma en cuenta la periodicidad del espectro.

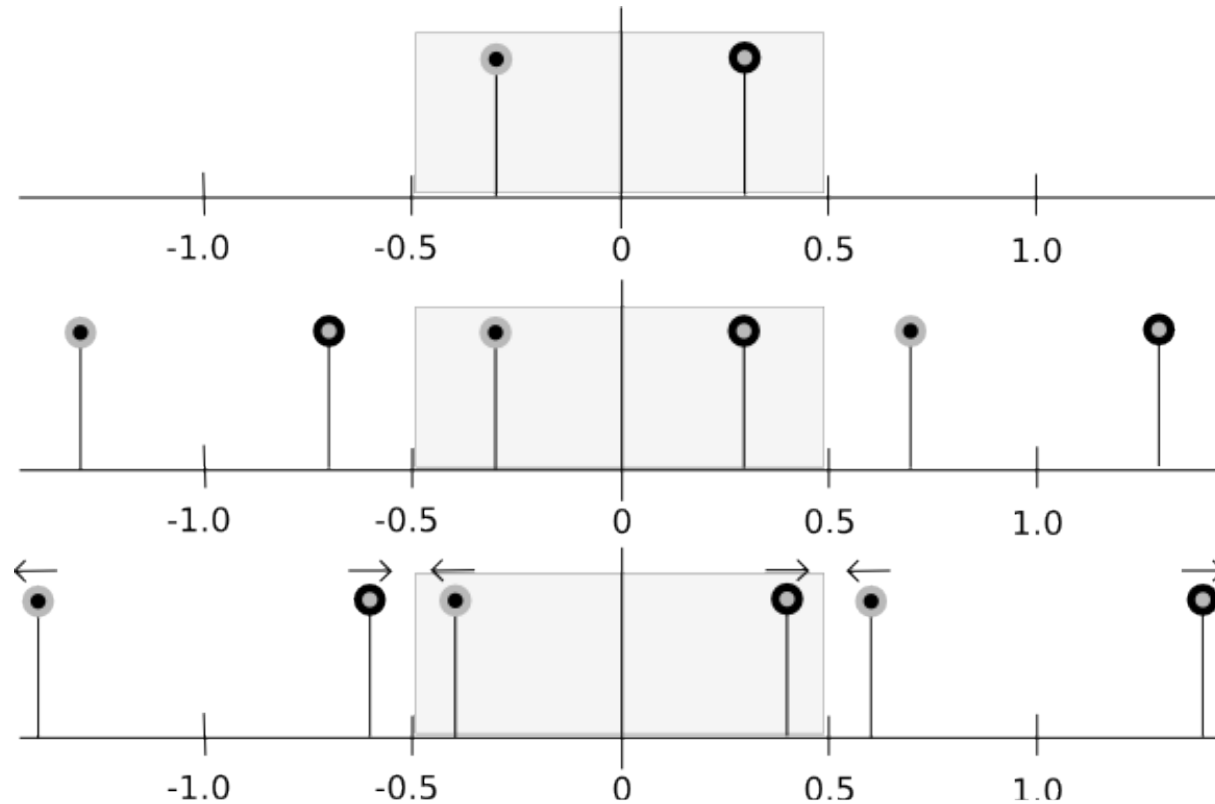
Por ejemplo el aliasing en el dominio de la frecuencia.



Naturaleza periódica de la DFT

Muchos fenómenos que ocurren en DSP sólo pueden comprenderse si se toma en cuenta la periodicidad del espectro.

Por ejemplo el aliasing en el dominio de la frecuencia.

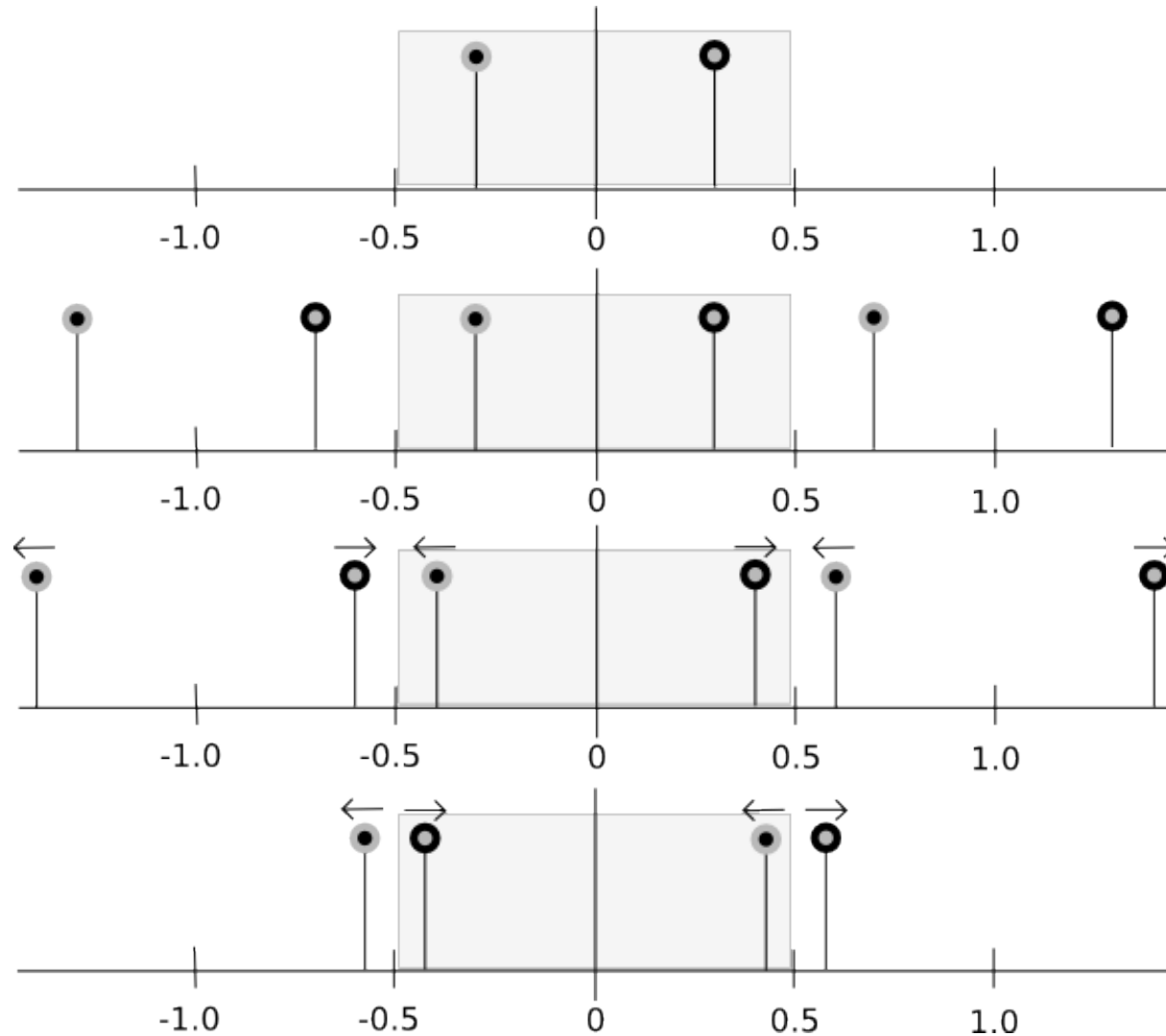


Naturaleza periódica de la DFT

Muchos fenómenos que ocurren en DSP sólo pueden comprenderse si se toma en cuenta la periodicidad del espectro.

Por ejemplo el aliasing en el dominio de la frecuencia.

Cuando un componente de frecuencia cruza la barrera de 0.5, el mismo fenómeno ocurre en los otros período del espectro, por lo que un componente de frecuencia negativa aparece cercano a 0.5 moviéndose hacia 0.



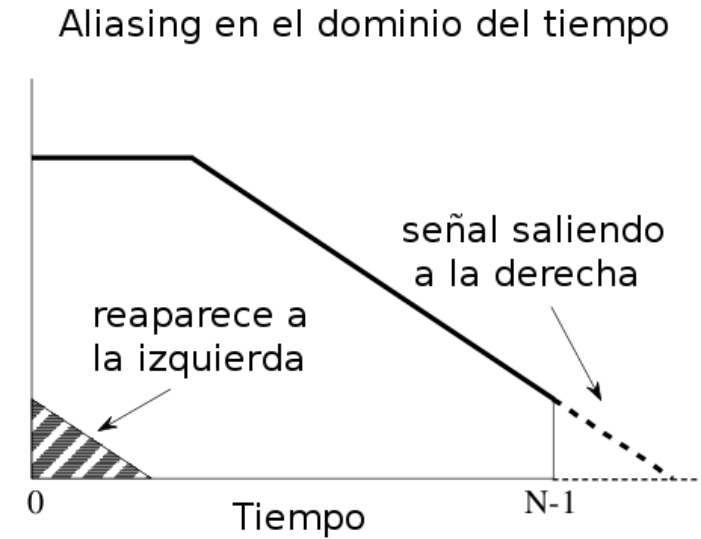
Naturaleza periódica de la DFT

Comportamiento del aliasing en
cada dominio considerando un
solo período:

Naturaleza periódica de la DFT

Comportamiento del aliasing en cada dominio considerando un solo período:

En el dominio del tiempo, si parte de la señal sale fuera del período, aparece a la izquierda.



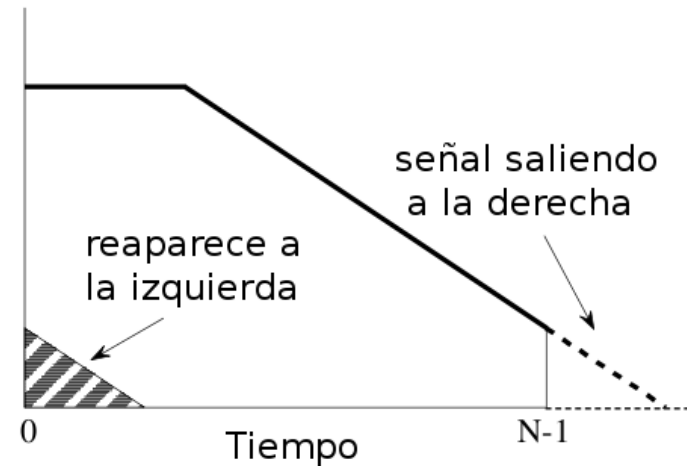
Naturaleza periódica de la DFT

Comportamiento del aliasing en cada dominio considerando un solo período:

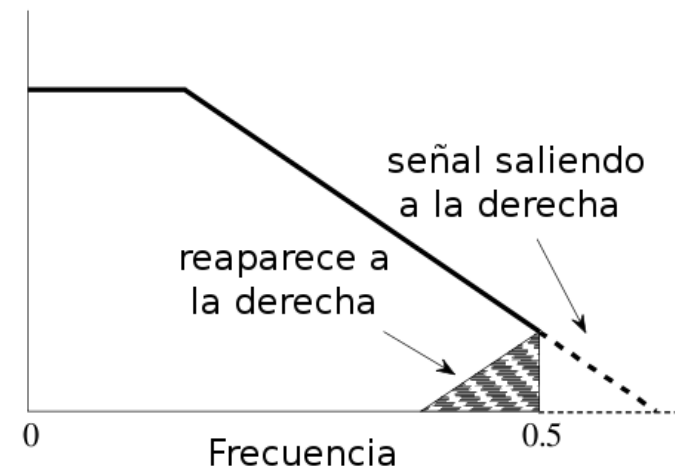
En el dominio del tiempo, si parte de la señal sale fuera del período, aparece a la izquierda.

En el dominio de la frecuencia, los componentes que sobrepasan la frecuencia de Nyquist se reflejan.

Aliasing en el dominio del tiempo



Aliasing en el dominio de la frecuencia



Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

Transformada de Fourier sobre señales **no periódicas y discretas**.

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

Transformada de Fourier sobre señales **no periódicas** y **discretas**.

Relación con la DFT :

Al rellenar con N ceros una señal se agranda su período y luego al tomar la DFT se obtiene una mayor cantidad de muestras entre 0 y 0.5

Cuando **N tiende a infinito**, la señal se vuelve **no periódica** y su **espectro continuo**. Esto corresponde a la **DTFT**, en la que el **espectro es continuo**.

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

Transformada de Fourier sobre señales **no periódicas** y **discretas**.

Relación con la DFT :

Al rellenar con N ceros una señal se agranda su período y luego al tomar la DFT se obtiene una mayor cantidad de muestras entre 0 y 0.5

Cuando **N tiende a infinito**, la señal se vuelve **no periódica** y su **espectro continuo**. Esto corresponde a la **DTFT**, en la que el **espectro es continuo**.

$$ReX(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cos(\omega n)$$

$$ImX(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sin(\omega n)$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

Transformada de Fourier sobre señales **no periódicas** y **discretas**.

Relación con la DFT :

Al rellenar con N ceros una señal se agranda su período y luego al tomar la DFT se obtiene una mayor cantidad de muestras entre 0 y 0.5

Cuando **N tiende a infinito**, la señal se vuelve **no periódica** y su **espectro continuo**. Esto corresponde a la **DTFT**, en la que el **espectro es continuo**.

$$ReX(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cos(\omega n)$$

$$ImX(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sin(\omega n)$$

Partimos de la DFT y tomamos N hasta infinito. La variable de frecuencia $\omega = 2\pi f$ es continua. La señal $x[n]$ es discreta.

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

Transformada de Fourier sobre señales **no periódicas** y **discretas**.

Relación con la DFT :

Al rellenar con N ceros una señal se agranda su período y luego al tomar la DFT se obtiene una mayor cantidad de muestras entre 0 y 0.5

Cuando **N tiende a infinito**, la señal se vuelve **no periódica** y su **espectro continuo**. Esto corresponde a la **DTFT**, en la que el **espectro es continuo**.

$$ReX(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cos(\omega n)$$

$$ImX(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sin(\omega n)$$

Partimos de la DFT y tomamos N hasta infinito. La variable de frecuencia $\omega = 2\pi f$ es continua. La señal $x[n]$ es discreta.

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ReX(\omega) \cos(\omega n) - ImX(\omega) \sin(\omega n) d\omega$$

Sustituimos la sumatoria por una integral.

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

Aplicación :

Supongamos que deseamos calcular la respuesta en frecuencia de un sistema a partir de su respuesta al impulso.

Si conocemos la respuesta al impulso como una **secuencia de muestras** (lo que obtendríamos en una medida experimental o simulación) aplicamos la **DFT** y obtenemos un **vector de muestras** de la respuesta en frecuencia.

En otros casos la respuesta al impulso puede concebirse (o modelarse) a través de **una ecuación**. En ese caso, la **DTFT** es usada para calcular analíticamente la respuesta en frecuencia también como una ecuación, que define una **curva continua** entre 0 y $f_s/2$.

Relación de Parseval

Dado que la representación de una señal en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia son equivalentes, deben tener la misma **energía**.

Esto se cumple para todas las transformadas de Fourier y recibe el nombre de relación de Parseval. En el caso de la DFT puede expresarse como:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x[i]^2 = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/2} \text{Mag } X[k]^2$$

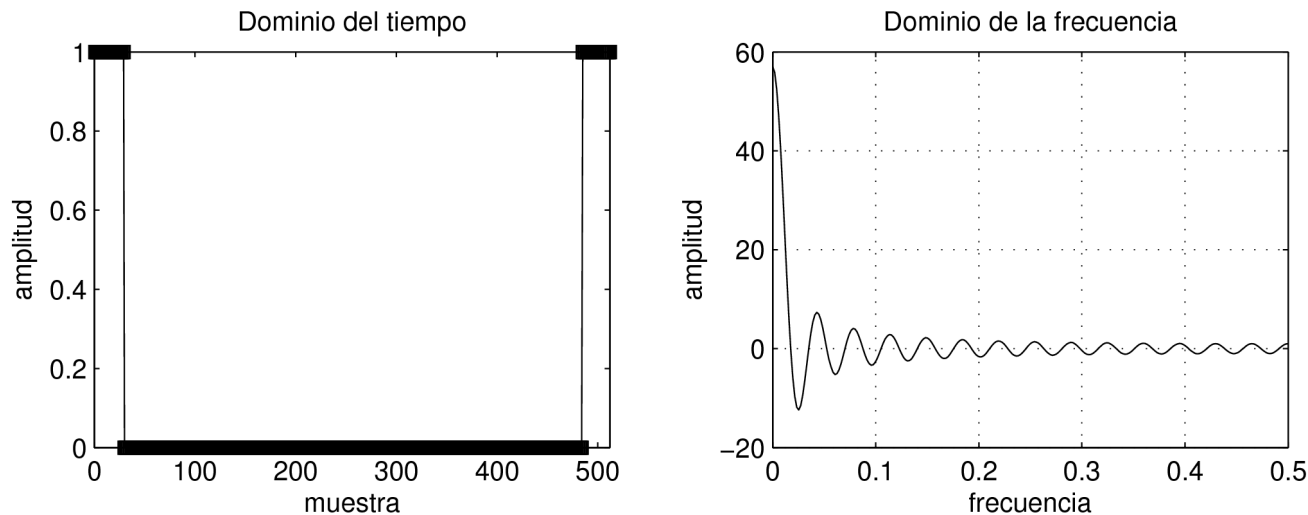
Desde al punto de vista físico representa la conservación de la energía. Permite realizar algunos cálculos en un dominio u otro según la conveniencia.

Pares de Transformadas

Para cada forma de onda en el tiempo existe su correspondiente forma de onda en frecuencia y viceversa.

Por ejemplo, un pulso rectangular en el tiempo se corresponde con una función senc (i.e. $\text{sen}(x)/x$) en el dominio de la frecuencia.

La **dualidad** asegura que lo inverso es también cierto: un pulso rectangular en el dominio de la frecuencia corresponde a una función senc en el tiempo.

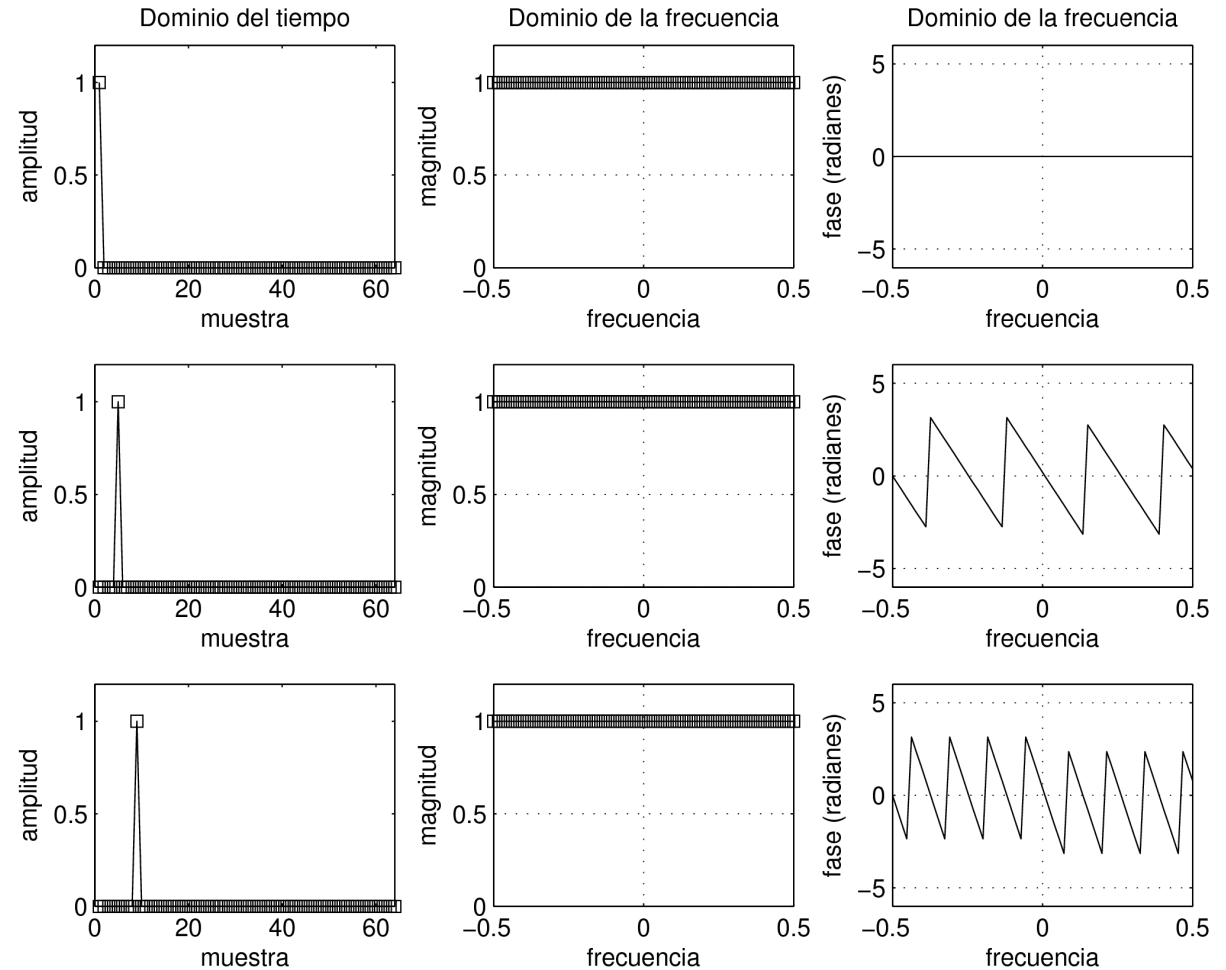


Las formas de onda (o funciones) que se corresponden mutuamente de esta forma se denominan **Pares de Transformadas de Fourier**.

Pares de Transformadas

Función delta:

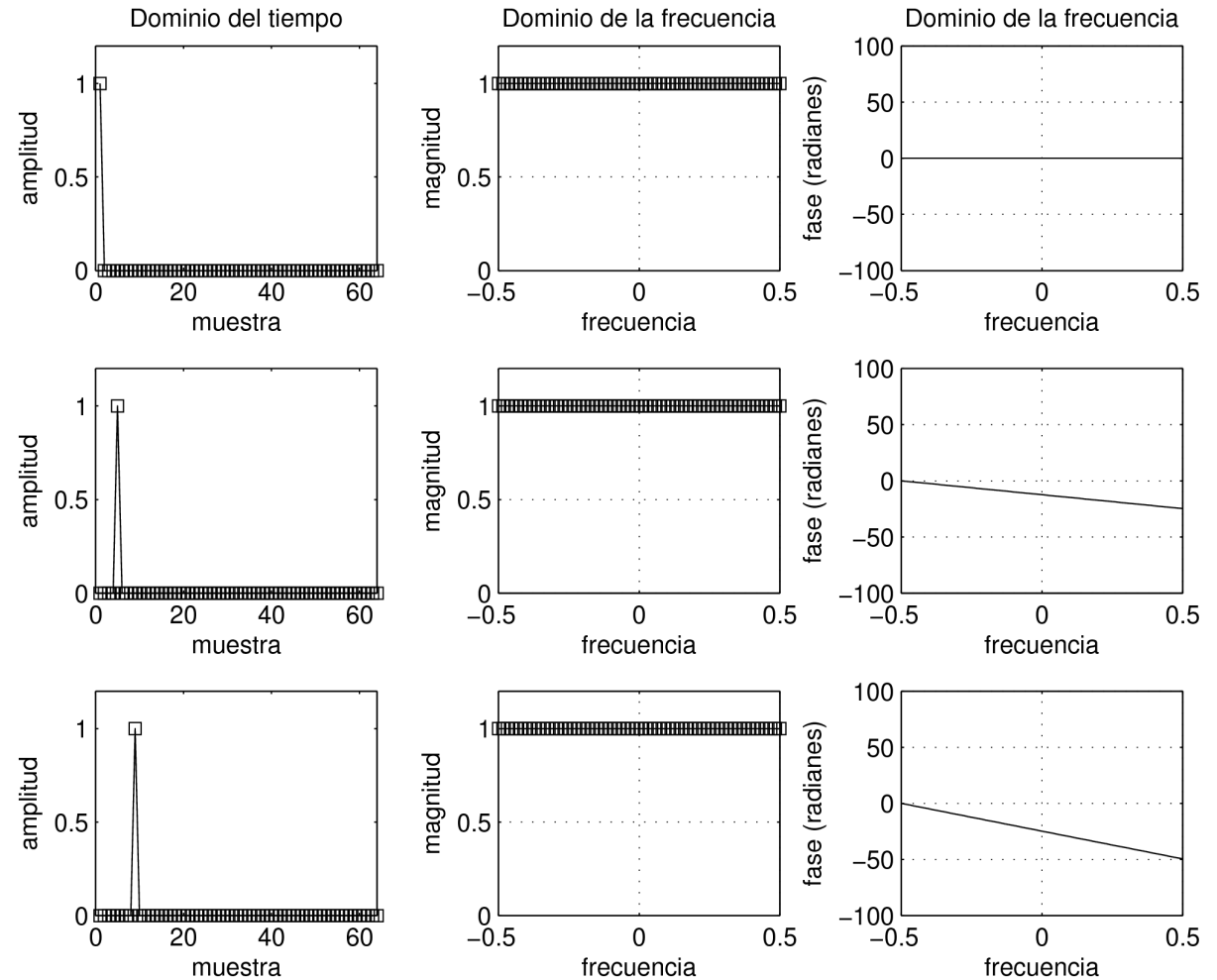
Magnitud constante.
Fase lineal.



Pares de Transformadas

Función delta:

Magnitud constante.
Fase lineal.

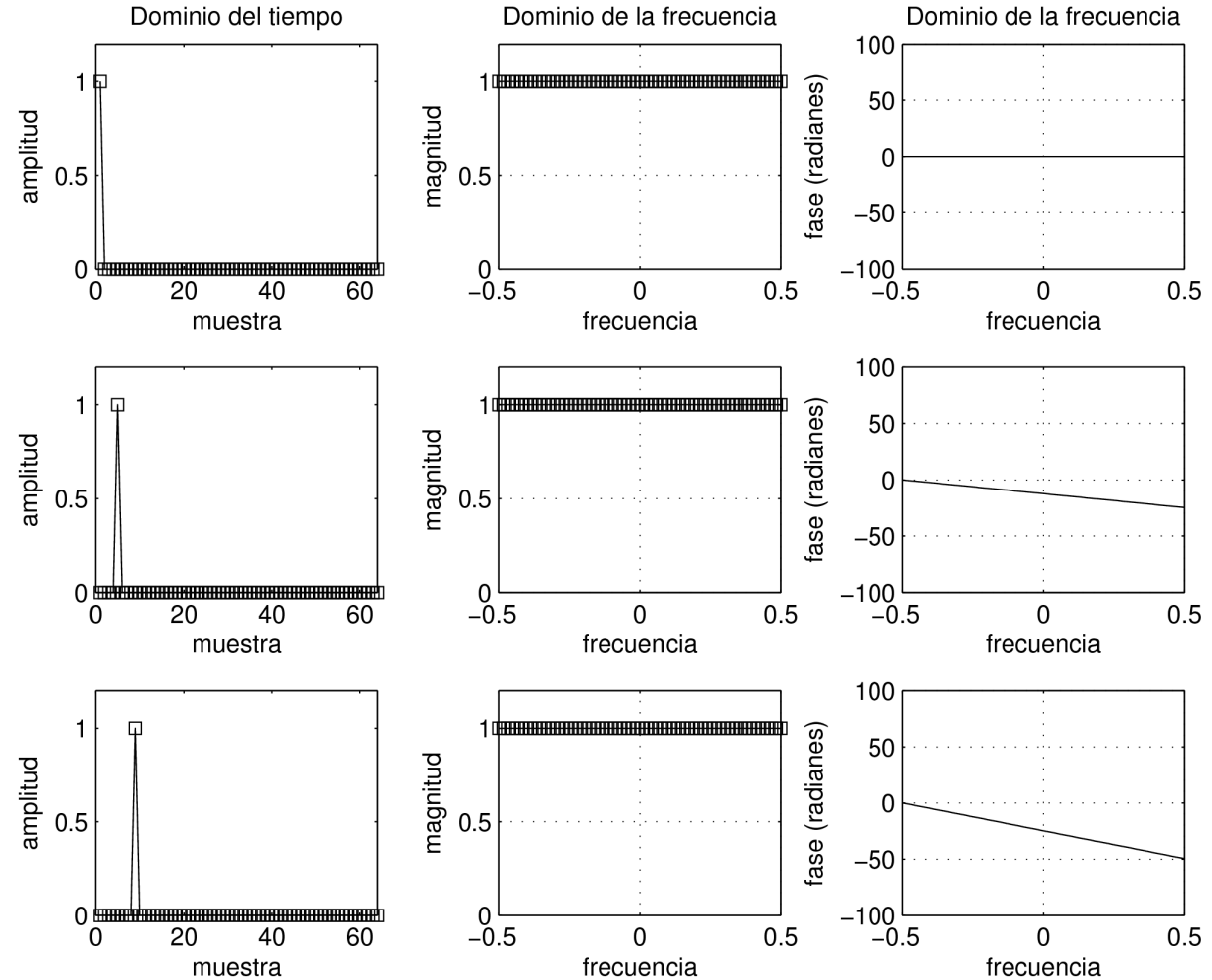


Pares de Transformadas

Función delta:

Magnitud constante.
Fase lineal.

Una delta en frecuencia
corresponde a una senoide
en el tiempo.



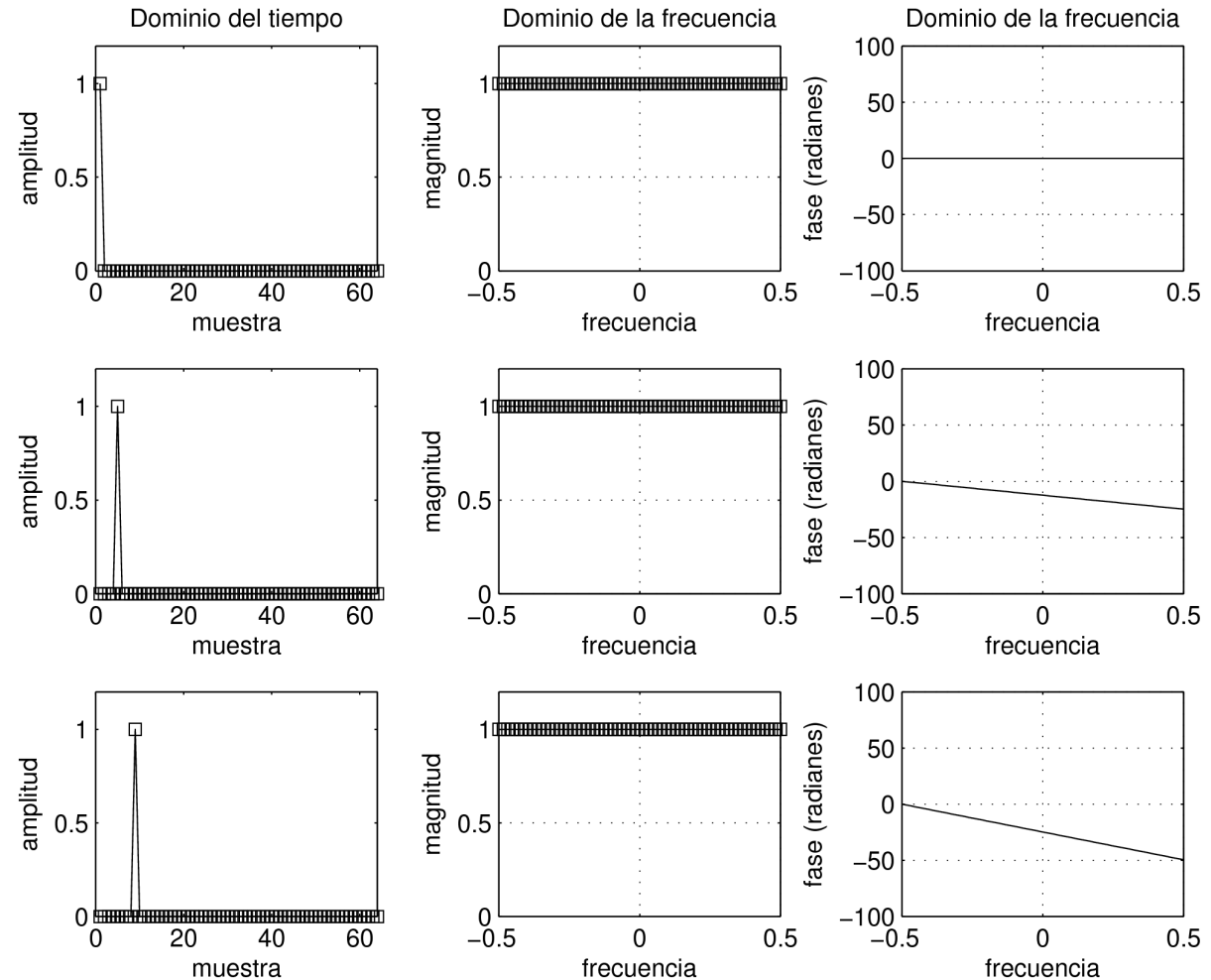
Pares de Transformadas

Función delta:

Magnitud constante.
Fase lineal.

Una delta en frecuencia
corresponde a una senoide
en el tiempo.

La **dualidad** asegura lo
inverso:



Pares de Transformadas

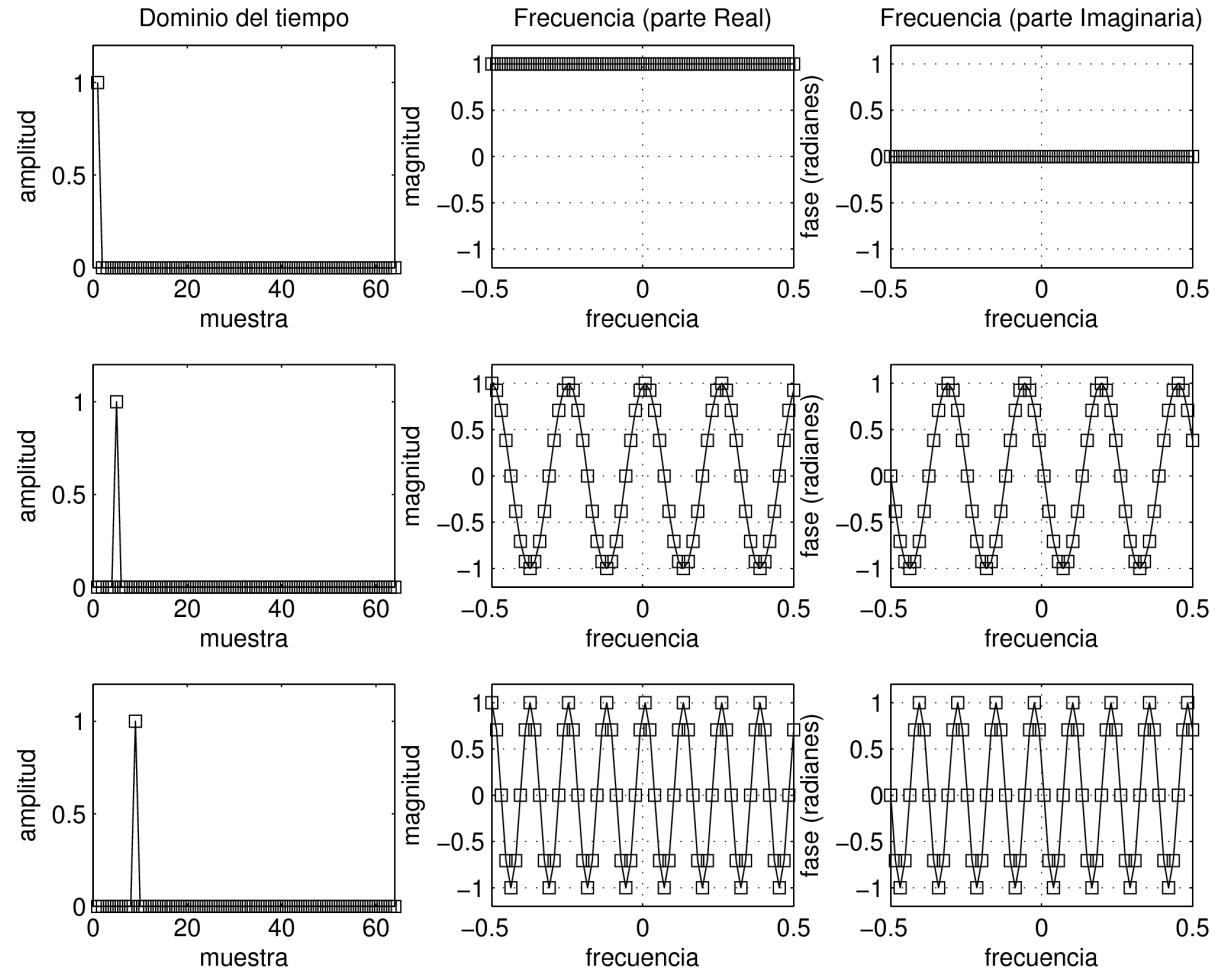
Función delta:

Magnitud constante.
Fase lineal.

Una delta en frecuencia
corresponde a una senoide
en el tiempo.

La **dualidad** asegura lo
inverso:

Considerando la parte real e
imaginaria del espectro, una
delta en el tiempo corresponde
a una senoide en frecuencia
(coseno y seno).



Pares de Transformadas

Función sinc:

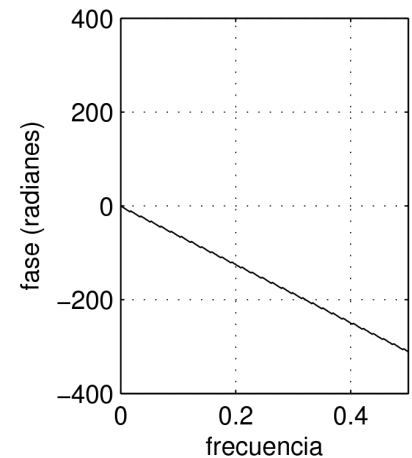
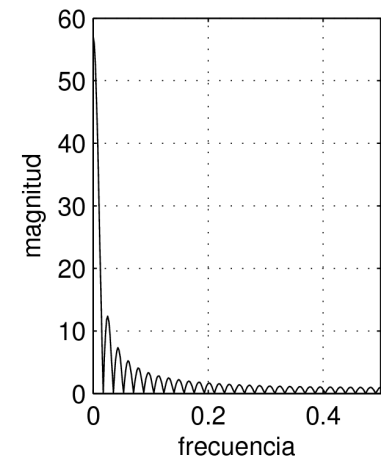
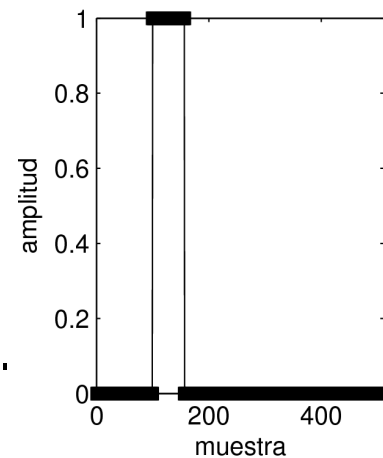
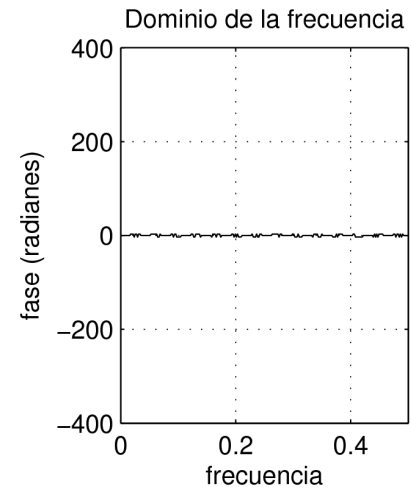
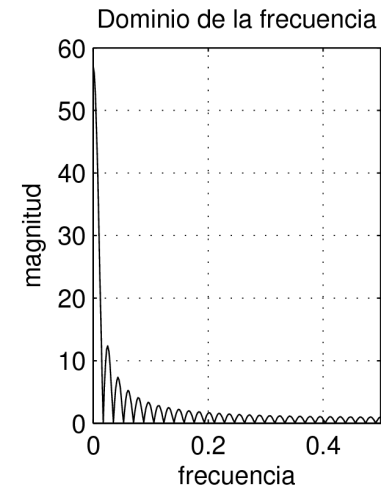
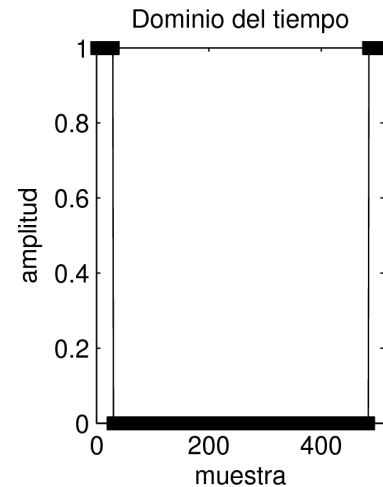
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Seno que decae en magnitud con la frecuencia.

Un pulso rectangular corresponde a un sinc y viceversa.

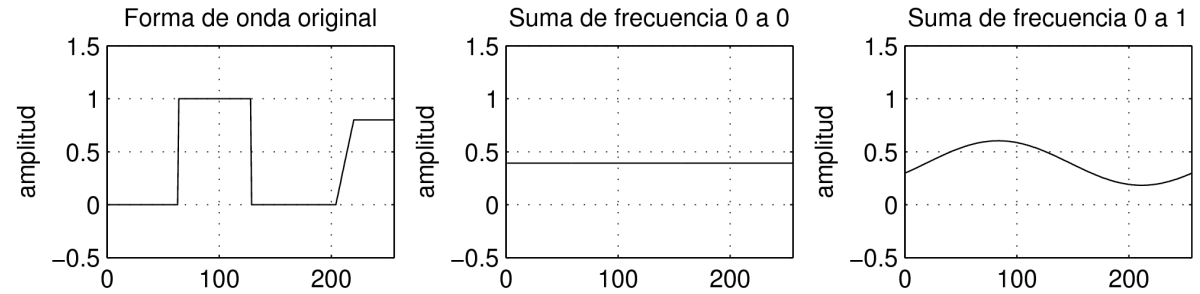
Un pulso rectangular en frecuencia corresponde con un pasabajos (o pasabanda) ideal.

Un sinc es infinito, por lo que existe aliasing en una representación periódica.



Efecto de Gibbs

Ejemplo: sintetizamos una forma de onda digital, sumando cada vez más sinusoides (hasta la cantidad dada por las N muestras).

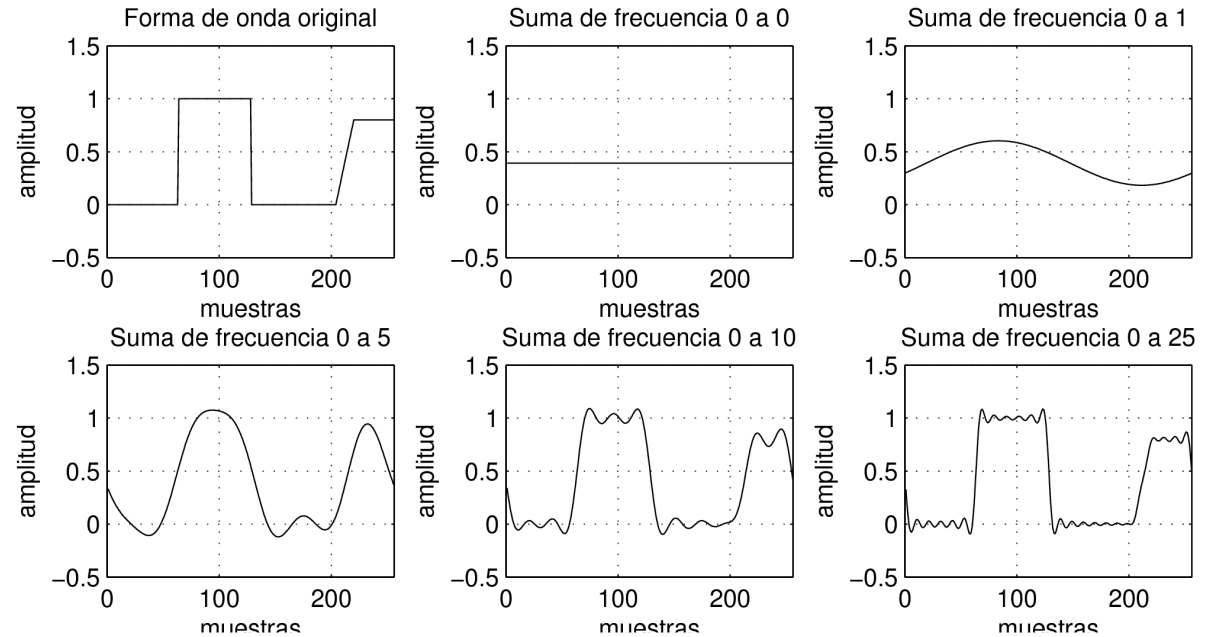


Efecto de Gibbs

Ejemplo: sintetizamos una forma de onda digital, sumando cada vez más sinusoides (hasta la cantidad dada por las N muestras).

Cuando se usan menos sinusoides que el total observamos el fenómeno de Gibbs:

- sobretiro
- oscilaciones



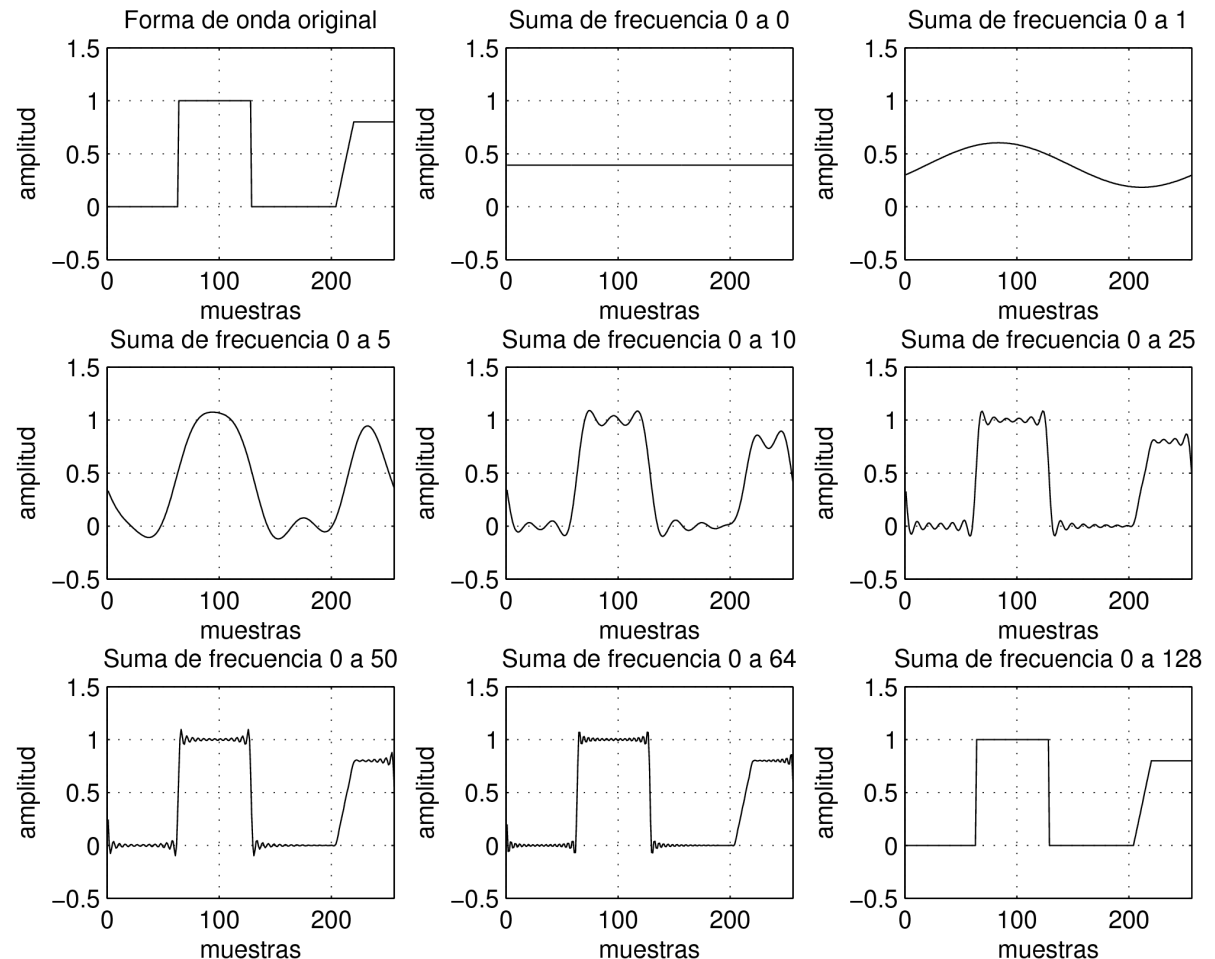
Efecto de Gibbs

Ejemplo: sintetizamos una forma de onda digital, sumando cada vez más sinusoides (hasta la cantidad dada por las N muestras).

Cuando se usan menos sinusoides que el total observamos el fenómeno de Gibbs:

- sobretiro
- oscilaciones

La amplitud de las oscilaciones se va reduciendo. El ancho del sobretiro va disminuyendo, pero su amplitud se mantiene constante.



Efecto de Gibbs

Ejemplo: sintetizamos una forma de onda digital, sumando cada vez más sinusoides (hasta la cantidad dada por las N muestras).

Cuando se usan menos sinusoides que el total observamos el fenómeno de Gibbs:

- sobretiro
- oscilaciones

La amplitud de las oscilaciones se va reduciendo. El ancho del sobretiro va disminuyendo, pero su amplitud se mantiene constante.

