Filtros senoc-enventanado
Filtros personalizados

clase 11

Temas

- Introducción a los filtros digitales

  Clasificación, Caracterización, Parámetros
- Filtros FIR (Respuesta al impulso finita)

  Filtros de media móvil, **filtros senoc enventanado**,

  filtros personalizados
- Transformada Z
- Filtros IIR (Respuesta al impulso infinita o recursivos)
- Respuesta en fase
- Filtros Chebyshev
- Comparación de desempeño
- Ejemplos: Filtros peine, filtros pasatodo
- Aplicaciones: sínteisis de cuerda pulsada, reverberadores, efectos

Filtros senoc-enventanado

Filtros FIR

Filtros de media móvil

- Buen despeño en el dominio del tiempo.
- Mala respuesta como pasabajos (roll-off lento, mala atenuación en banda atenuada).

Filtros senoc-enventanado

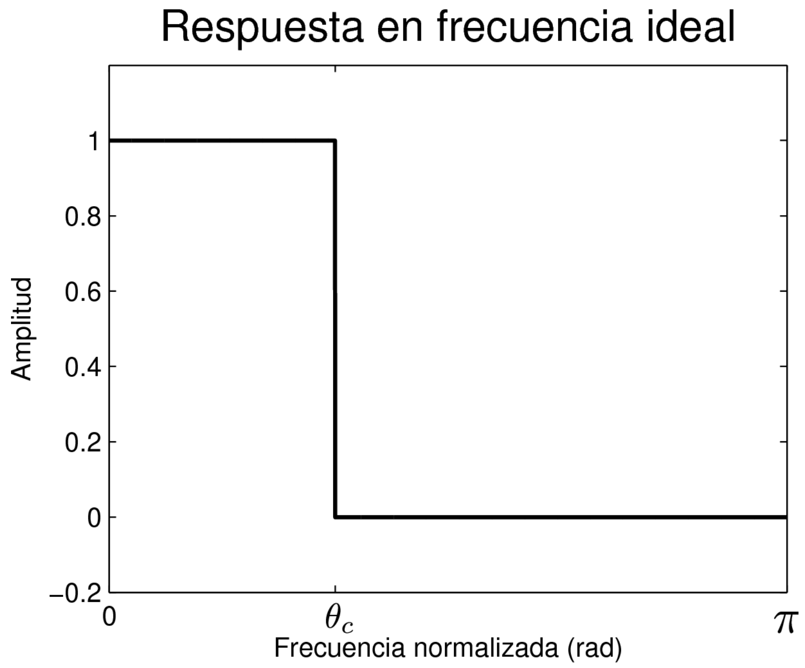
- Excelente comportamiento como pasabajos. Útiles para separar bandas de frecuencia.
- Se pueden llevar a límites de desempeño muy altos (roll-off rápido, excelente atenuación en banda atenuada, respuesta plana en la banda pasante).
- Compromiso entre la velocidad de ejecución y buenas características como pasabajos.

Motivación sinc-enventanado

Pasabajos ideal

La respuesta en frecuencia del pasabajos ideal tiene las siguientes características:

- La banda pasante tiene ganancia 1 y es perfectamente plana.
- La banda atenuada tiene atenuación infinita (ganancia 0).
- El ancho de la banda de transición es 0.

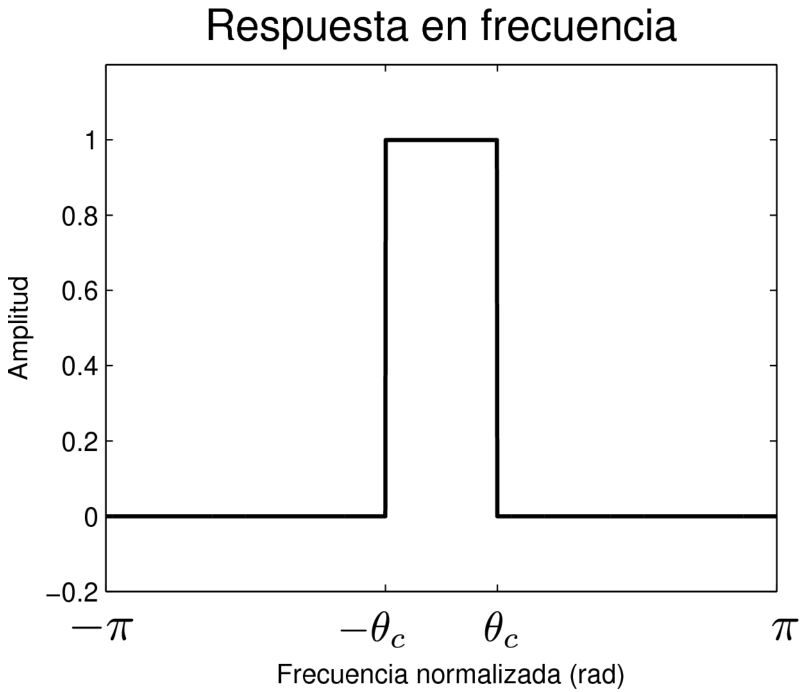


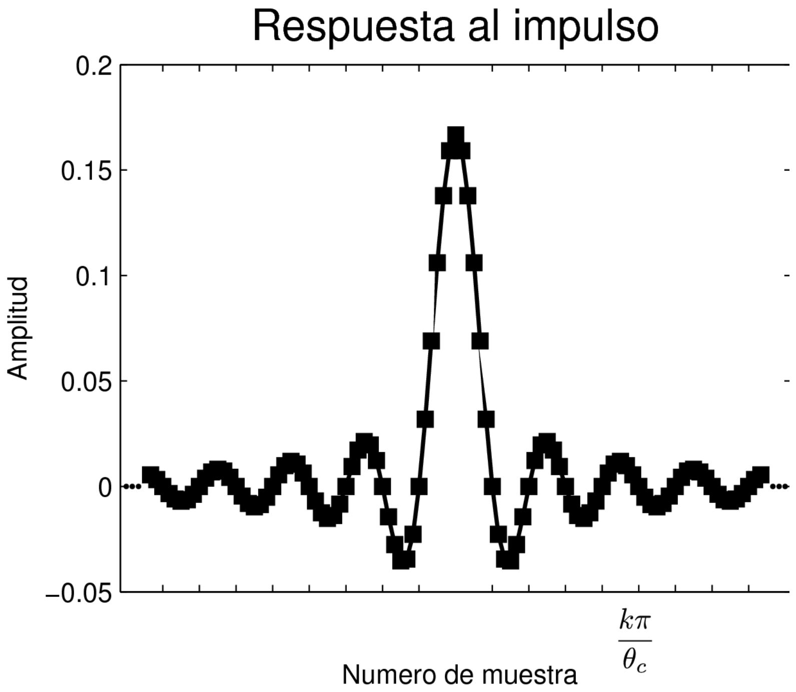
La idea del método consiste en obtener la respuesta al impulso del pasabajos aplicando la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT) inversa a la respuesta en frecuencia del pasabajos ideal.

Motivación sinc-enventanado

Pasabajos ideal

$$H_{ideal}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\theta| \leq \theta_c \\ 0 & \text{si } \theta_c < |\theta| \leq \pi \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{DTFT Inversa}} \quad h_{ideal}[n] = \frac{\text{sen}(\theta_c n)}{\pi n}$$





Motivación sinc-enventanado

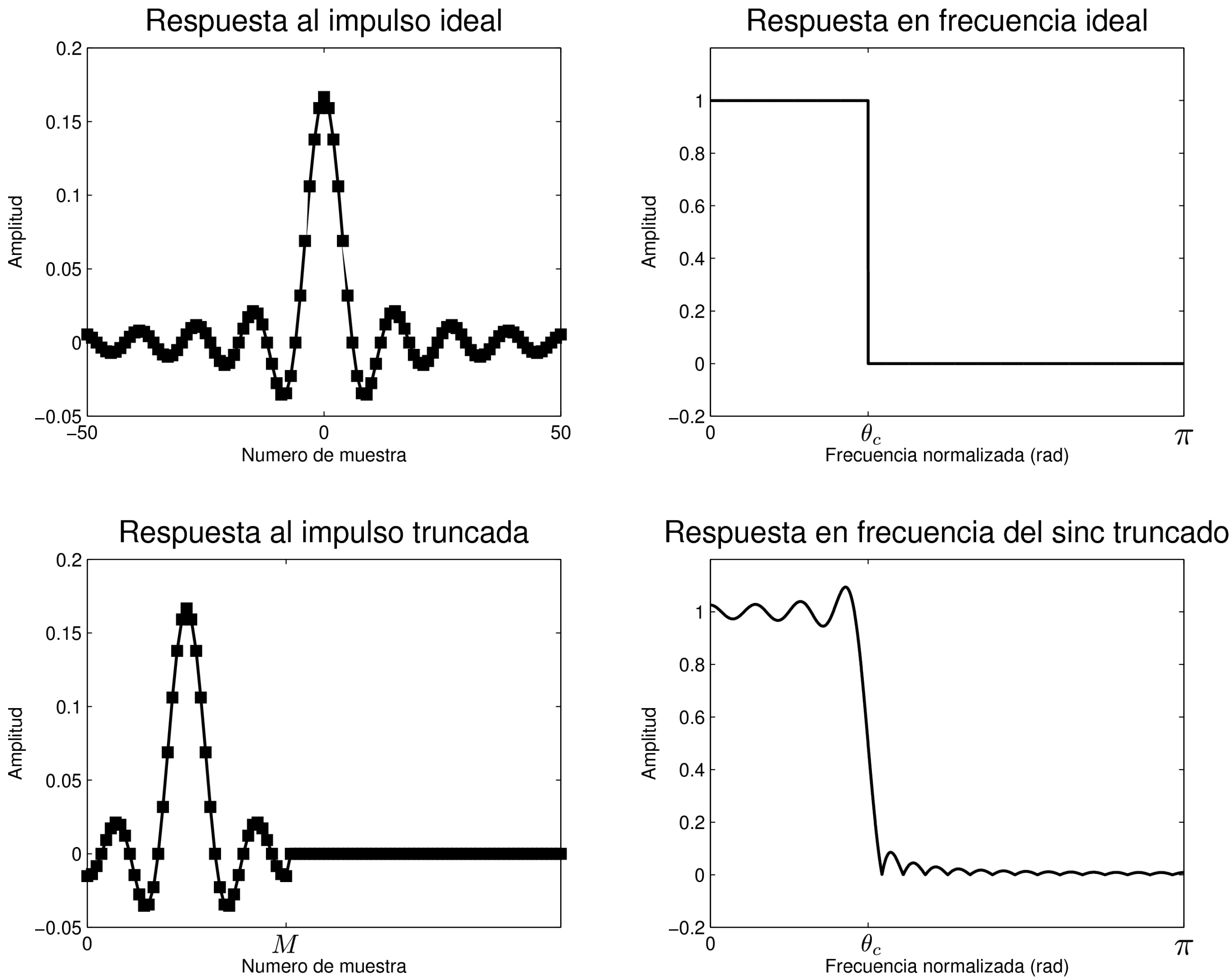
Observaciones

- La respuesta al impulso ideal es un seno cardinal (función *sinc*). Tiene infinitas muestras no nulas hacia ambos lados. Es un filtro irrealizable.
- La amplitud decae como $1/n$.

Modificaciones al sinc ideal para hacerlo realizable

- **Truncamiento**: se trunca a $M+1$ muestras, elegidas simétricamente alrededor de la muestra del centro de simetría, con M par. De esta forma, es un filtro FIR y se puede implementar mediante el producto convolución.
- **Desplazamiento**: Se desplaza la secuencia entera a la derecha de forma que abarque desde la muestra 0 hasta la M. El filtro se hace causal.

Respuesta en frecuencia del sinc-truncado



Motivación sinc-enventanado

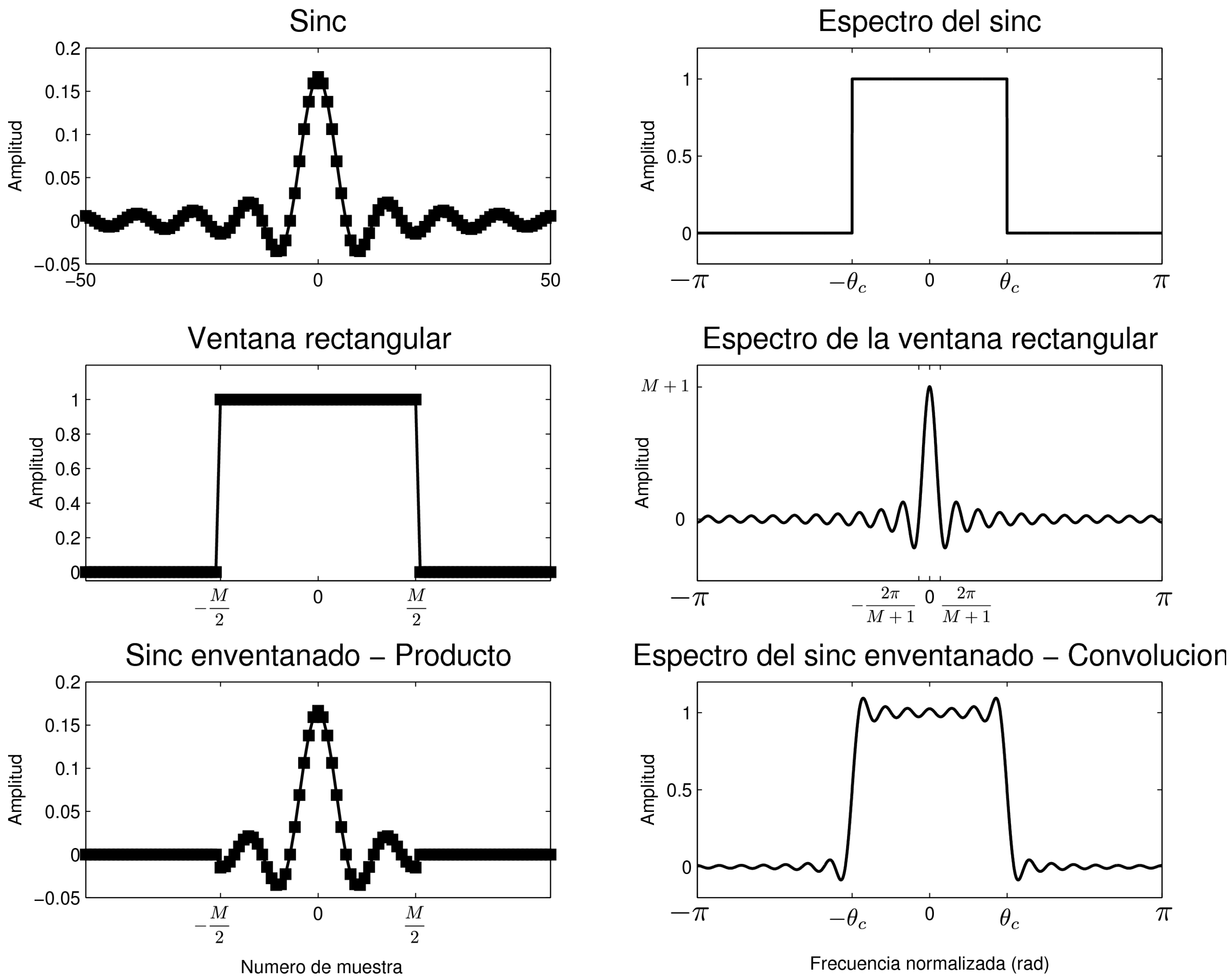
Observaciones

- La respuesta al impulso del sinc enventanado tiene efectivamente comportamiento de pasabajos.
- Dista mucho de ser ideal:
  - Hay ripple en la banda pasante
  - Tiene pobre atenuación en la banda atenuada

(debido al efecto de Gibbs ocasionado por las discontinuidades abruptas en los bordes)

  - La banda de transición no es nula.
- La forma de analizar el resultado es pensando en que el trucamiento equivale a multiplicar la señal en el tiempo con una ventana rectangular El espectro del pasabajos ideal queda convolucionado por la transformada de una ventana rectangular de largo *M+1*.

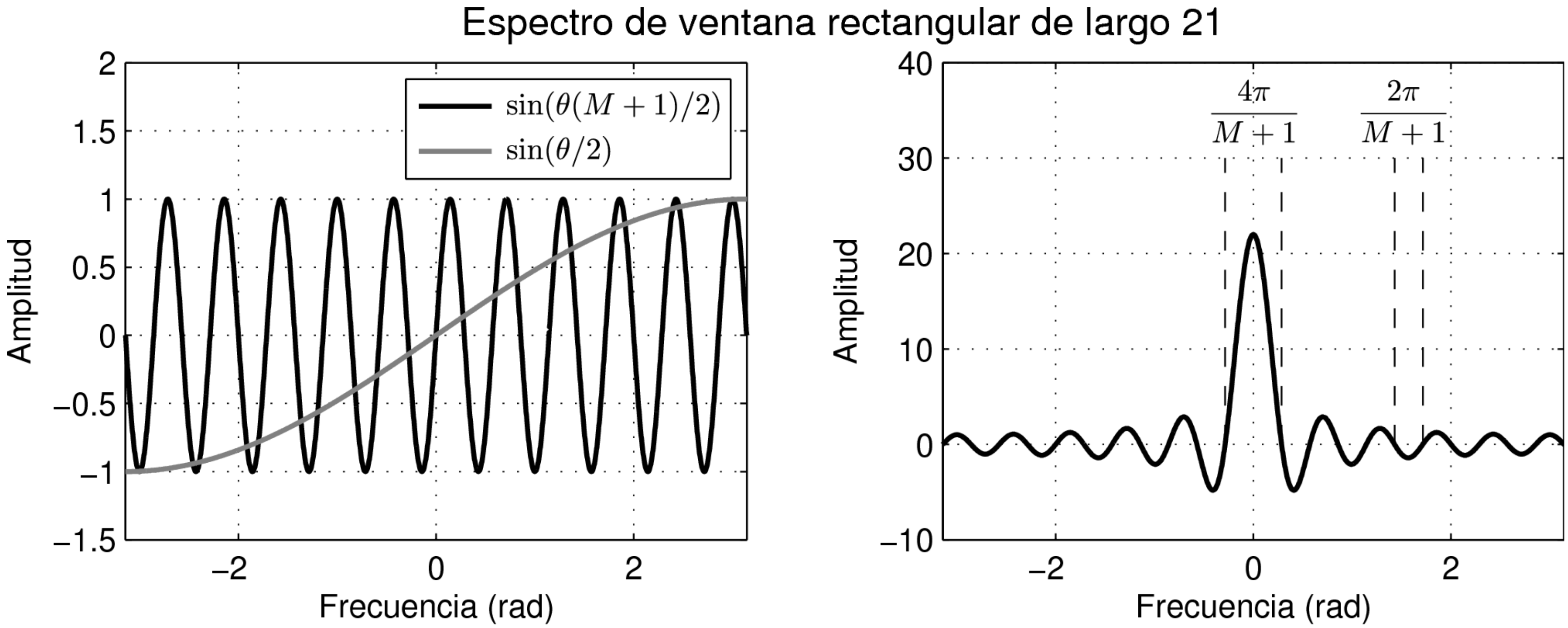
Respuesta en frecuencia del sinc-truncado



Respuesta en frecuencia del sinc-truncado

Espectro de ventana rectangular

$$h_{rect}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{DTFT}} \quad H_{rect}(\theta) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta(M+1)}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Respuesta en frecuencia del sinc-truncado

Espectro de ventana rectangular

Características

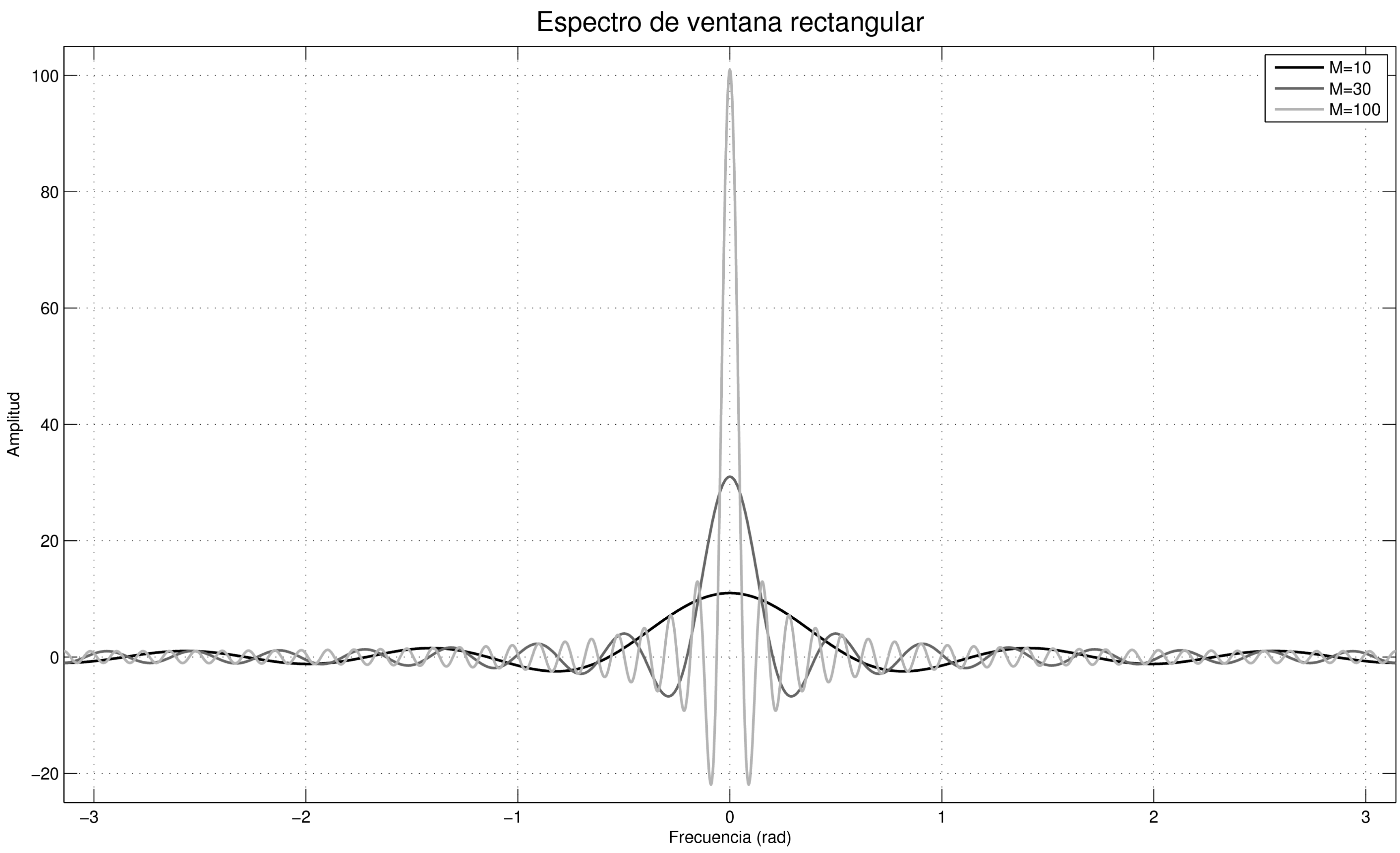
- El ancho de banda (ancho del lóbulo principal):

$$\Delta\theta_{princ} = \frac{4\pi}{M+1}$$

  Es inversamente proporcional a M. Se hace mas angosto al incrementar M.

- La oscilaciones (ripple) son mas rápidas al incrementar M.
- El área del lóbulo principal y de los lóbulos secundarios se mantiene aproximadamente constante al cambiar M.
- La amplitud de las oscilaciones decrece con la frecuencia pero es independiente de M.
- Es una función simétrica.

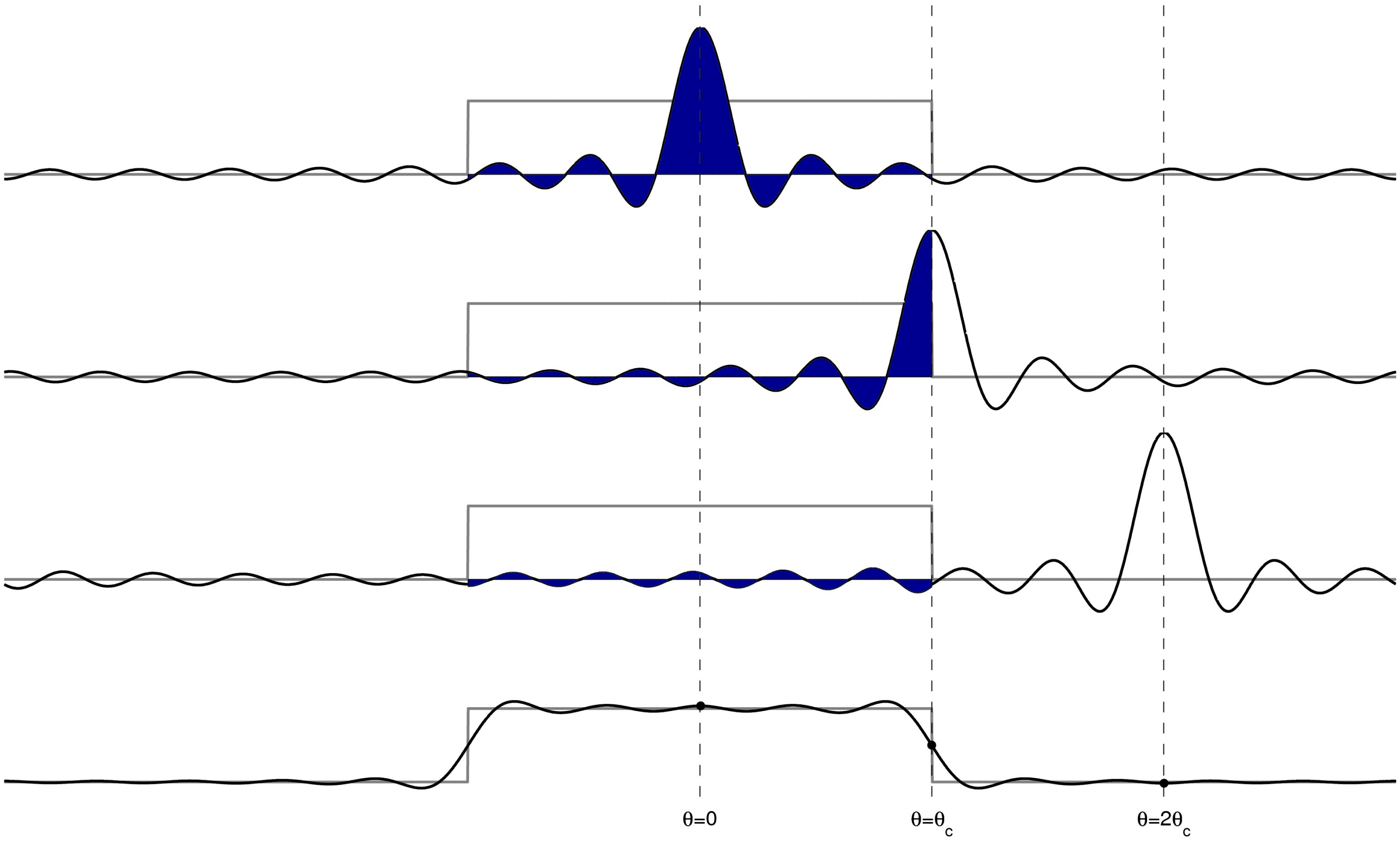
Respuesta en frecuencia del sinc-truncado



Respuesta en frecuencia del sinc-truncado

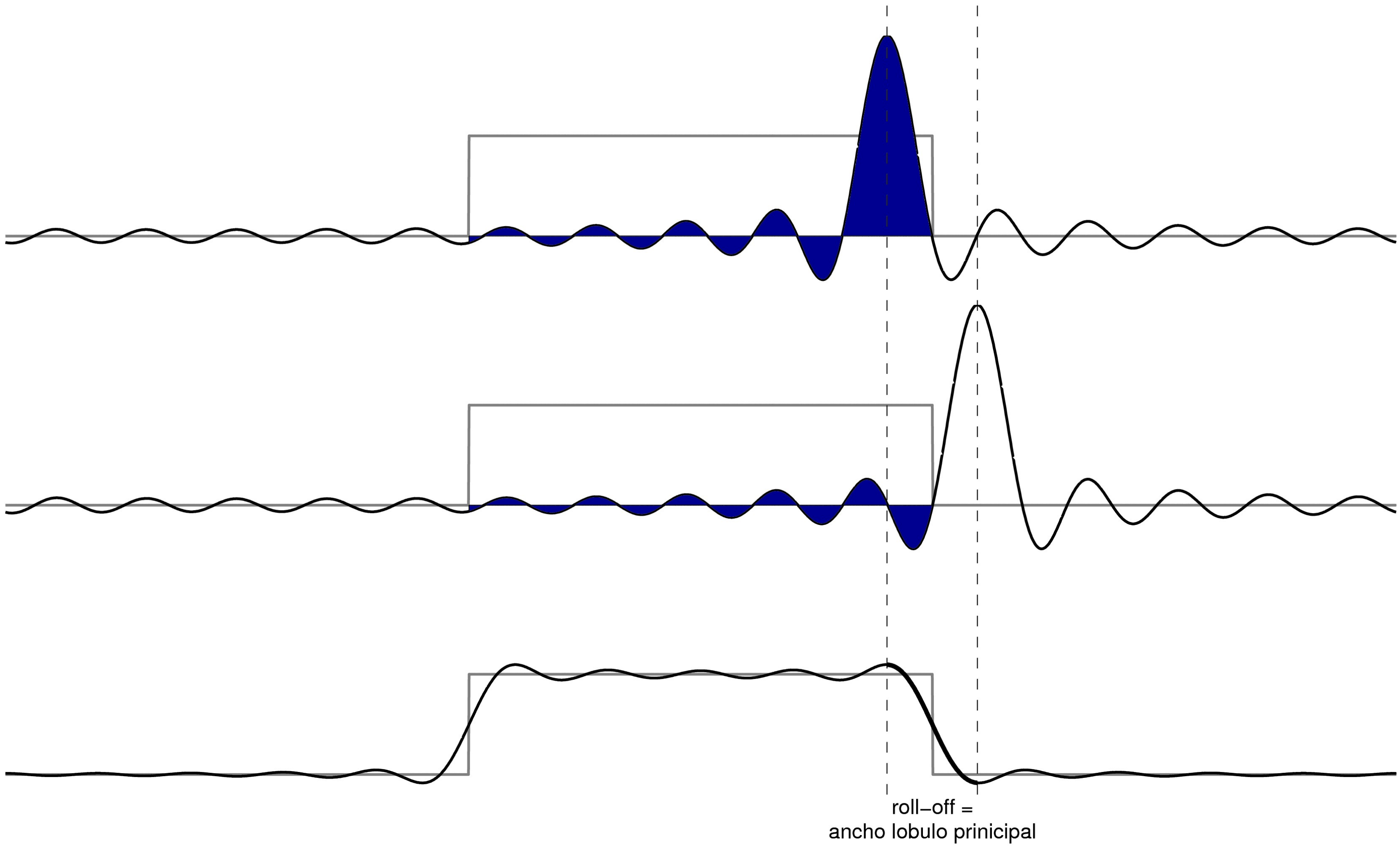
Convolución de los espectros

Convolución de señales continuas: $H_{lp}(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\text{Área}\left[H_{ideal}(\omega)H_{win}(\theta-\omega)\right]$



Respuesta en frecuencia del sinc-truncado

Relación entre el roll-off y el ancho del lóbulo principal de la ventana rectangular

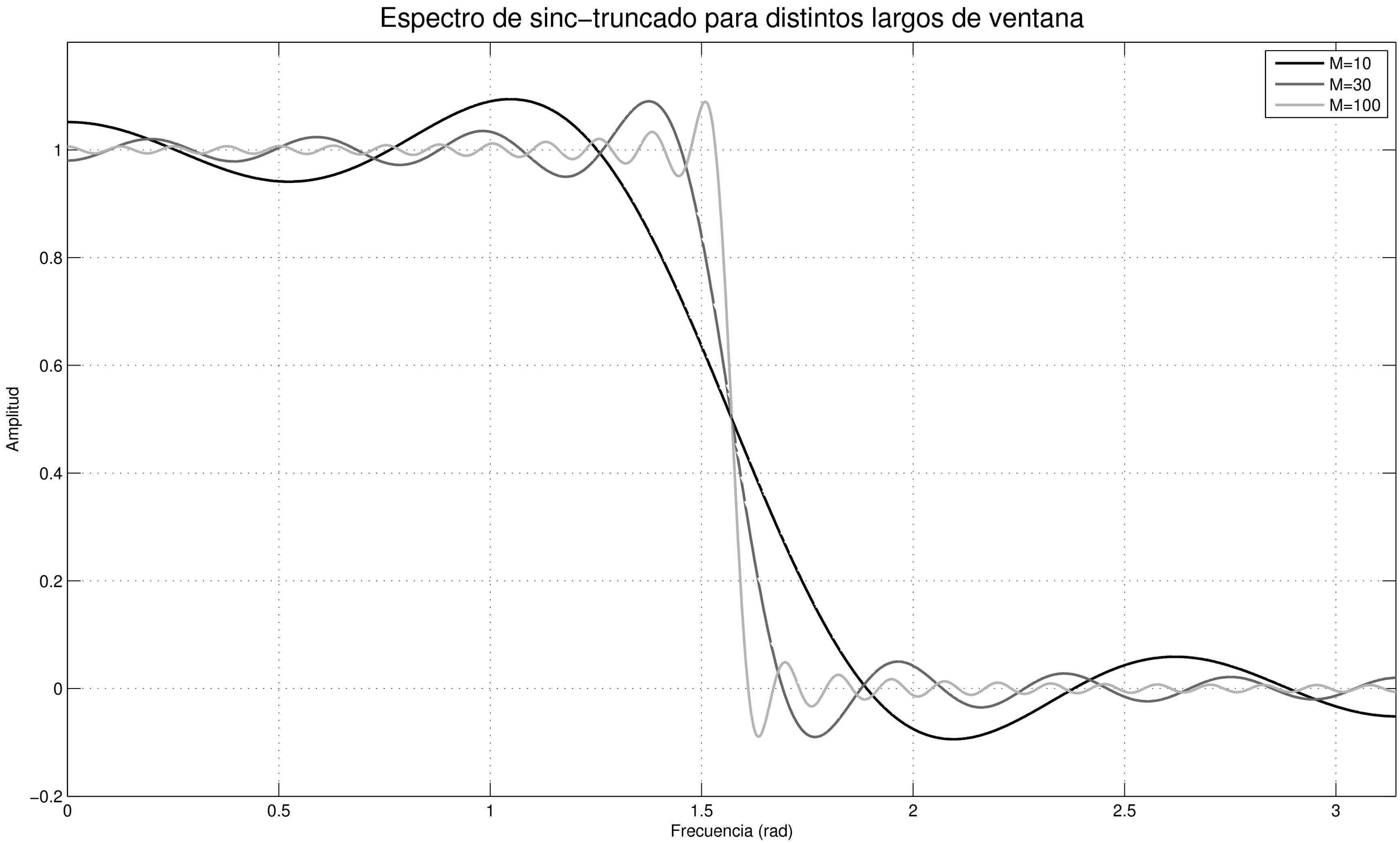


Respuesta en frecuencia del sinc-truncado

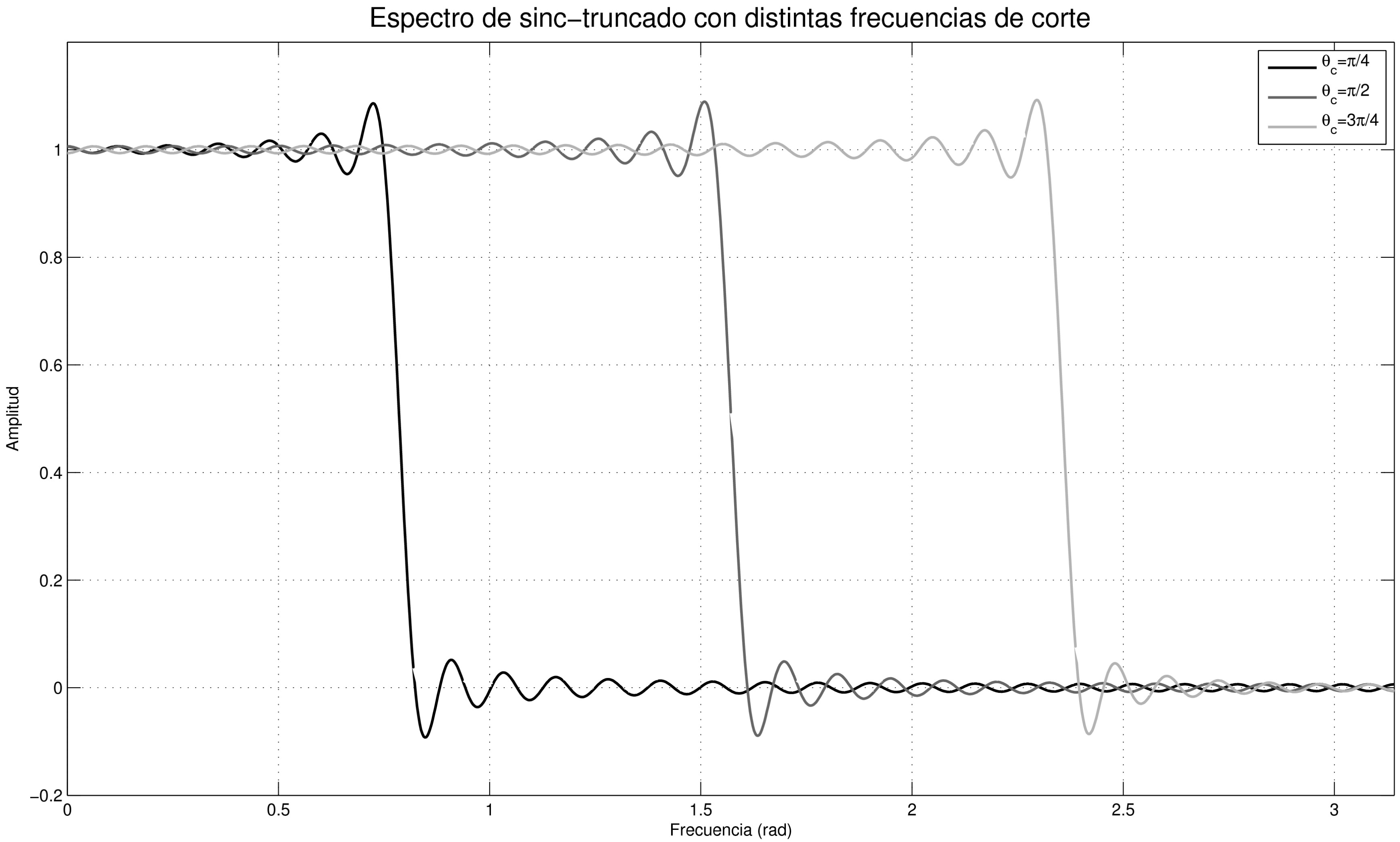
Características del pasabajos en función de M

- **Roll-off**: es directamente proporcional al ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana rectangular. Por lo tanto, el roll-off es mas rápido al incrementar el largo de la ventana M.
- **Período del ripple**: coincide con el período de las oscilaciones del espectro de la ventana. Por lo tanto, el ripple es mas rápido al incrementar el largo de la ventana.
- **Amplitud del ripple**: depende del área de los lóbulos secundarios. Por lo tanto, la atenuación en la banda atenuada y el ripple en la banda pasante es independiente del largo de la ventana M.
- Es simétrica respecto a la frecuencia de corte. El ripple en la banda atenuada es igual al de la banda pasante.
- Las características de la respuesta en frecuencia (roll-off, ripple) no dependen de la frecuencia de corte.

Respuesta en frecuencia del sinc-truncado



Respuesta en frecuencia del sinc-truncado



Enventanado

Limitantes del sinc truncado como pasabajos

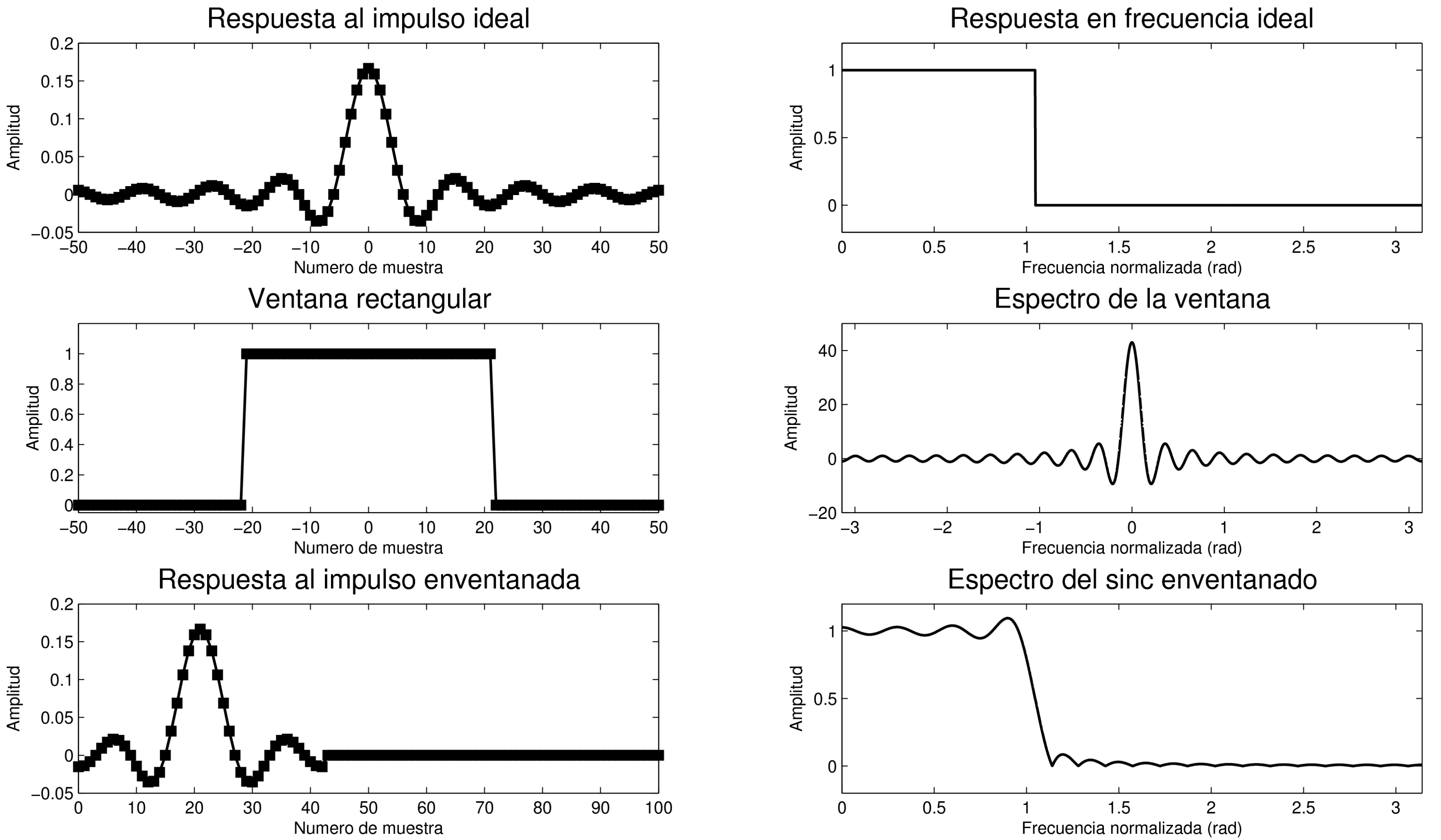
Ripple: La amplitud del ripple depende del área de los lóbulos secundarios del espectro de la ventana rectangular. Es independiente del largo de ventana *M* asi que no se puede controlar.

- Mala atenuación en la banda atenuada
- Ripple excesivo en la banda pasante

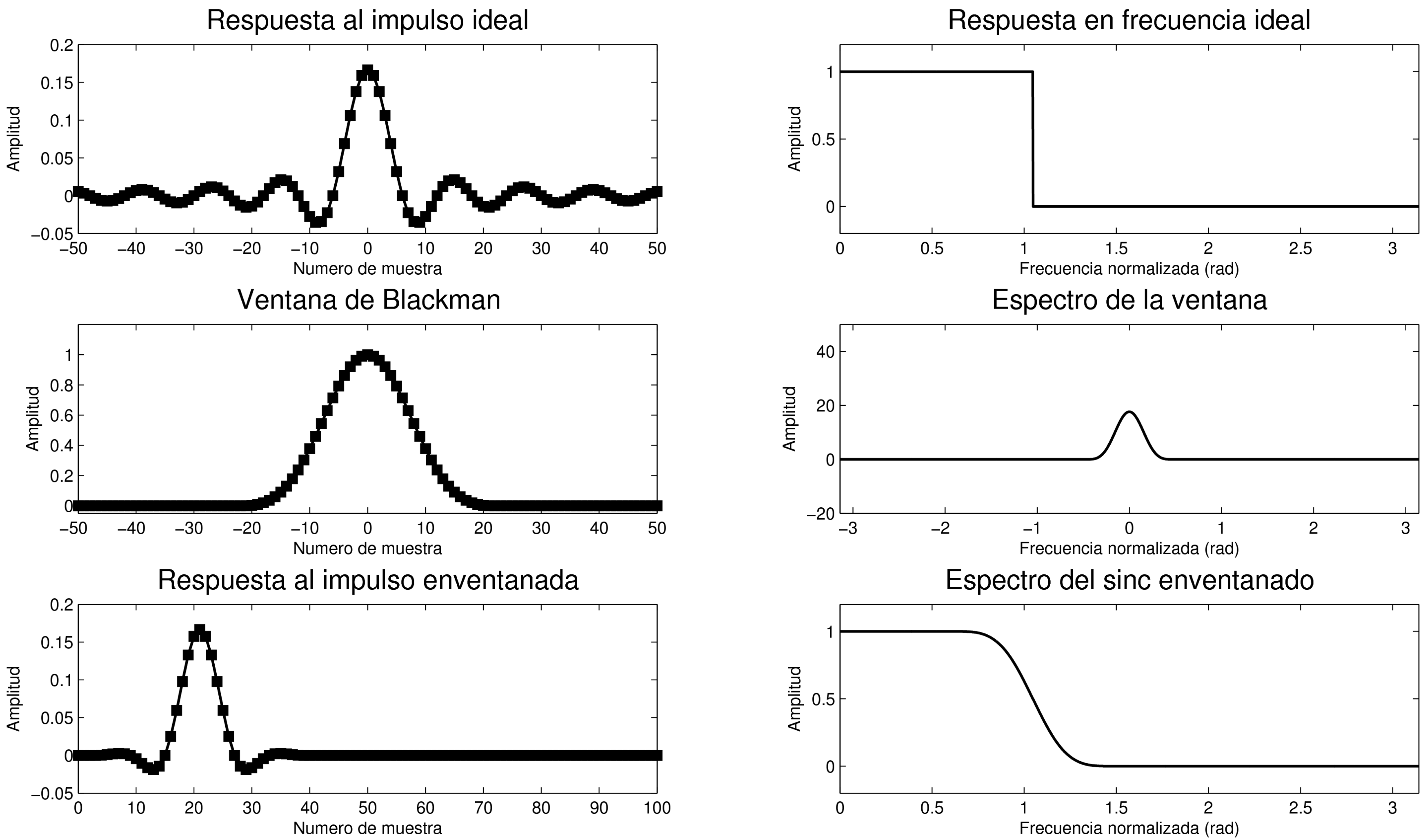
Roll-off: La velocidad del roll-off depende del ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana rectangular. El ancho del lóbulo principal se reduce con el largo de la ventana. La velocidad del roll-off se incrementa con el largo de la ventana.

Usando ventanas de suavizado cuyo espectro tenga área menor de los lóbulos secundarios respecto a la ventana rectangular, se reduce el ripple.

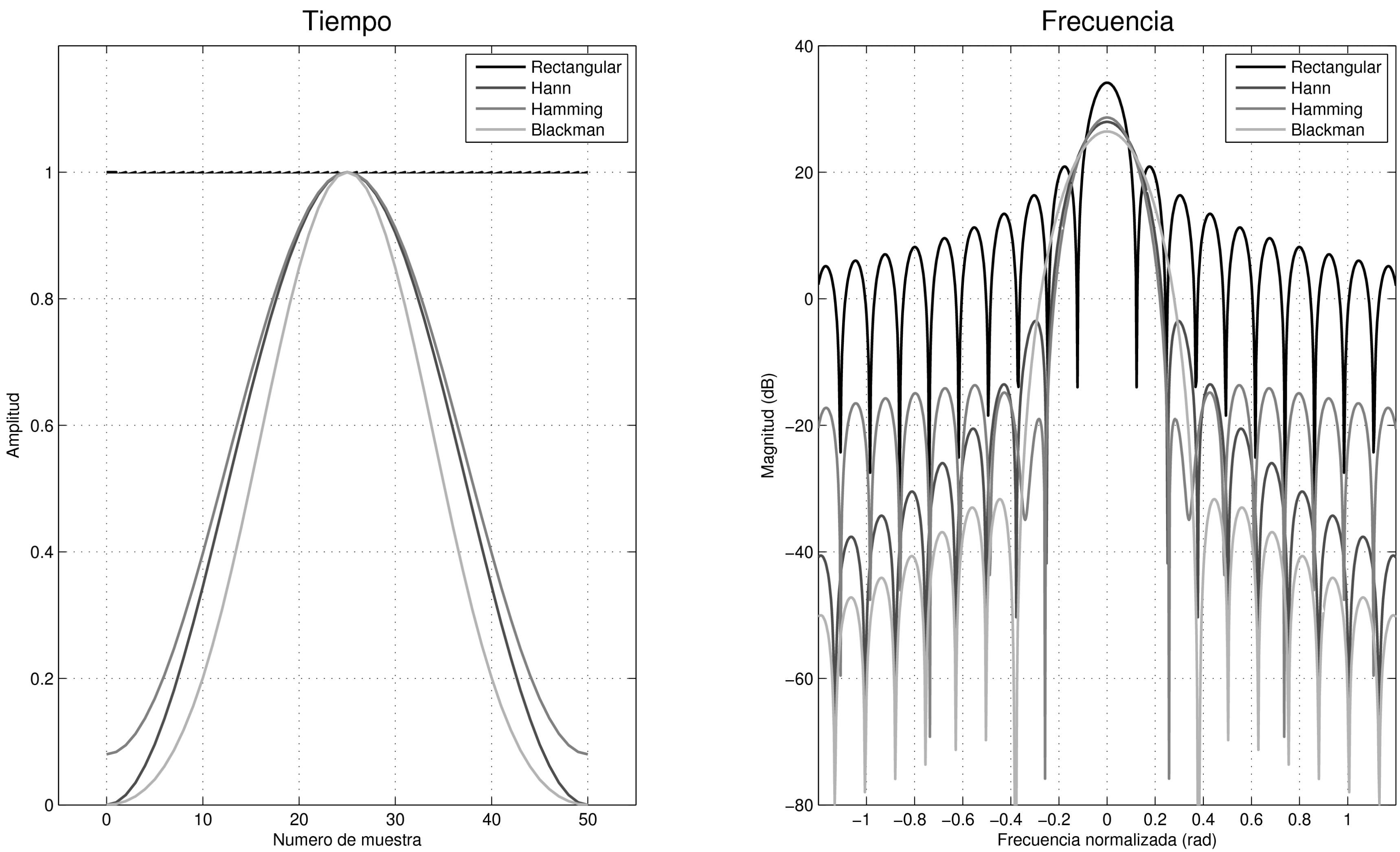
Enventanado



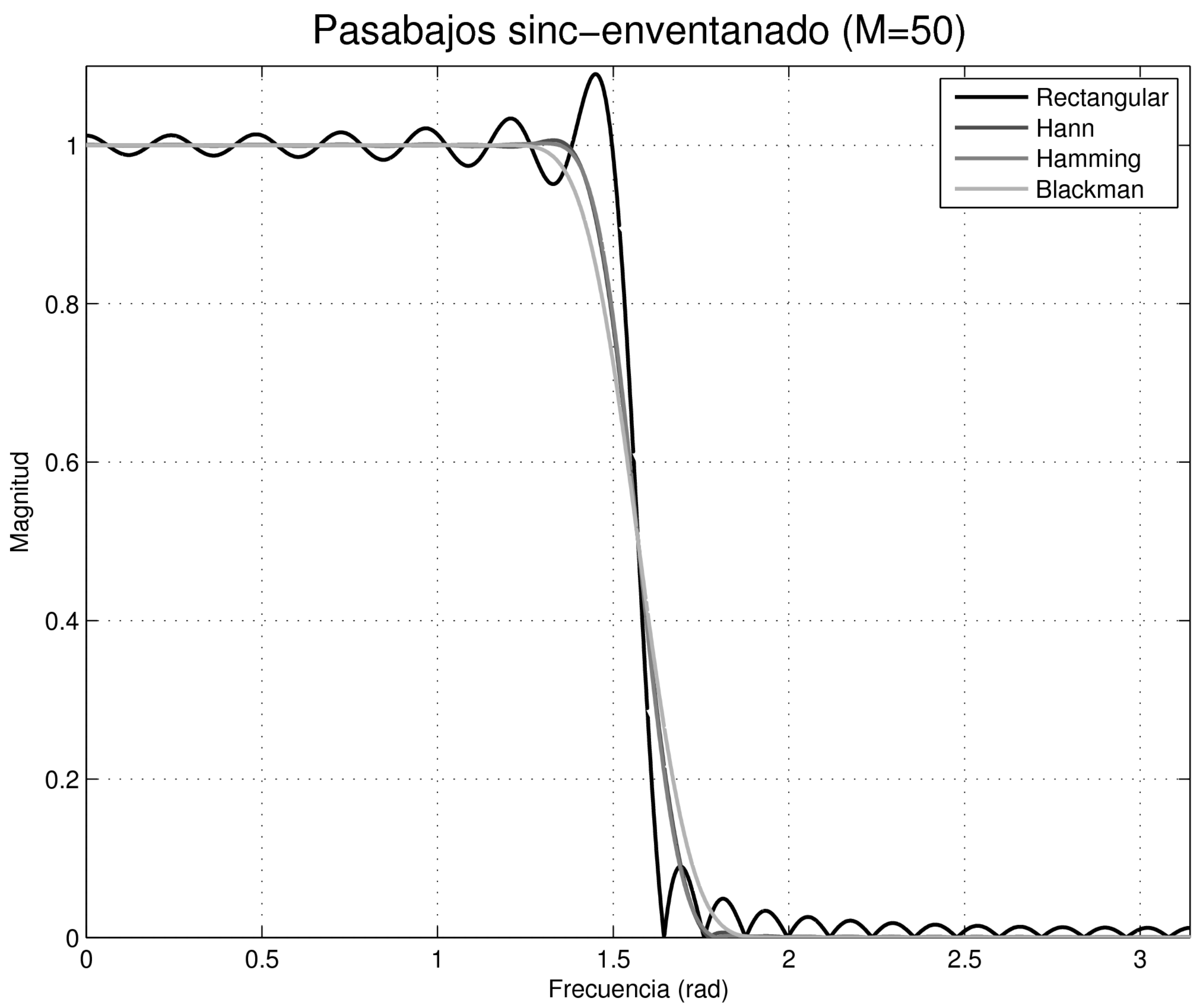
Enventanado



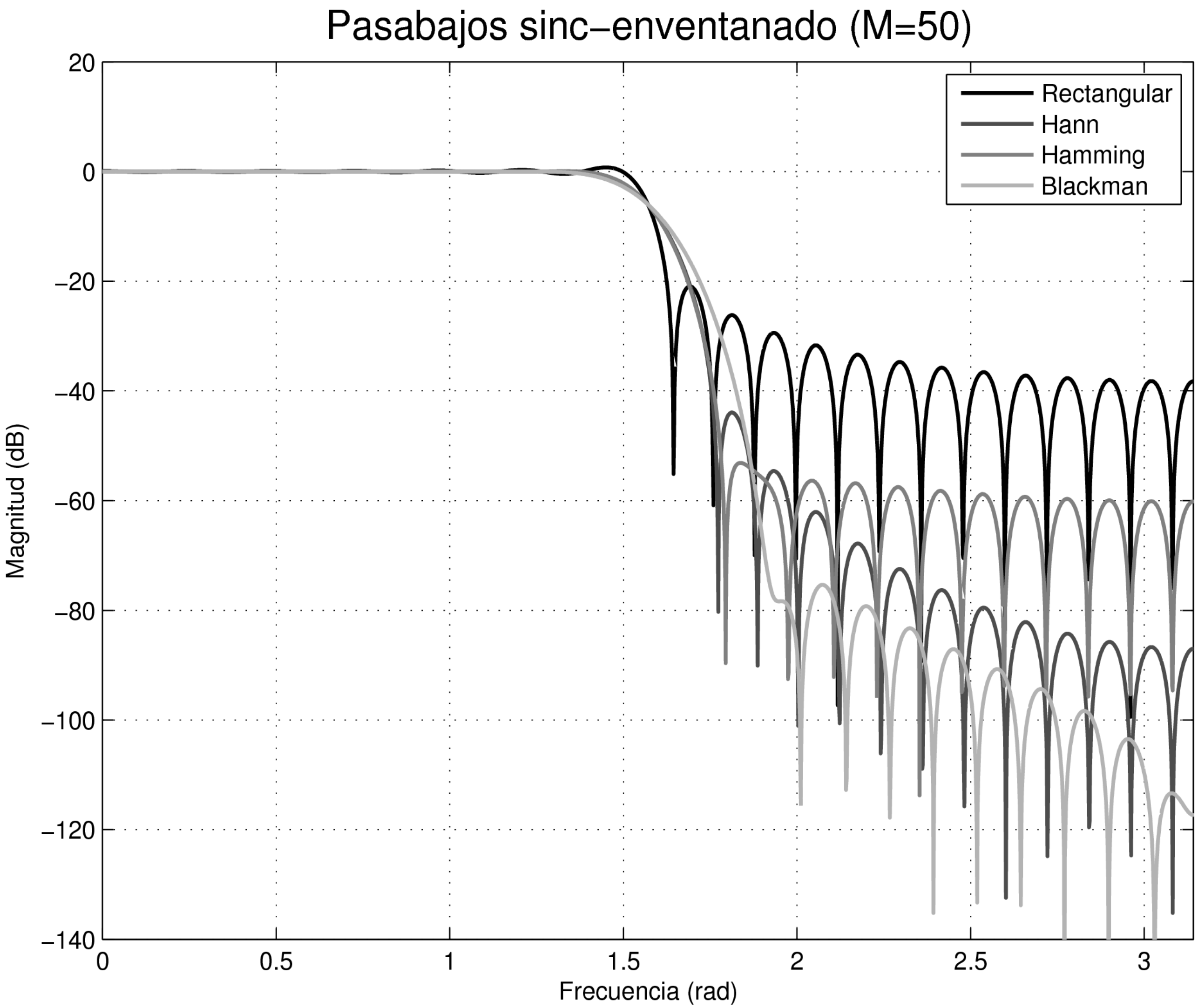
Comparación de ventanas



Comparación de ventanas



Comparación de ventanas



Comparación de ventanas

Observaciones

- La atenuación en decibeles es mas del doble usando ventana de Hann o de Hamming y mas del triple usando ventana de Blackman.
- El ancho de la banda de transcición es el doble usando ventanas de Hann o de Hamming y el triple usando ventana de Blackman.

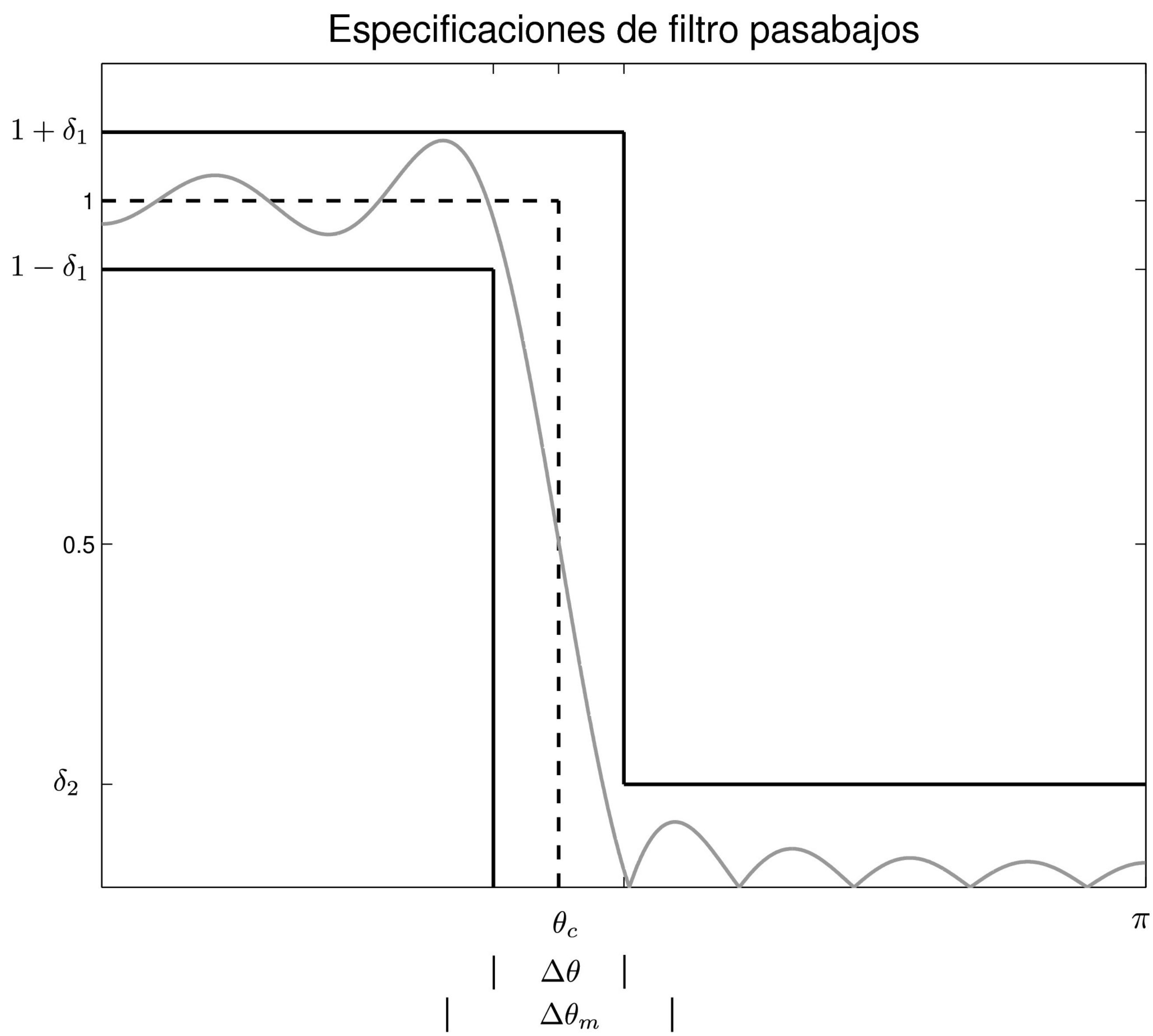
Diseño del filtro

Especificaciones (máscara del filtro)

- Ancho de la banda pasante
- Ripple en la banda pasante
- Ancho de la banda de transición
- Ancho de la banda atenuada
- Ripple en la banda atenuada

Dadas las **especificaciones** del filtro, hay que elegir el largo de la respuesta al impulso (kernel del filtro) **M**, la **frecuencia de corte** y la ventana. La elección debe ser tal que el filtro cumpla los requerimientos y el largo sea lo menor posible.

Diseño del filtro



Diseño del filtro

Alternativa 1: Diseño analítico empleando el conocimiento de las características de las ventanas.

	Ancho de la banda de transición (Aproximado)	**Ripple** $20\log_{10}\delta$ (dB)
Rectangular	$4\pi/(M+1)$	-21
Hann	$8\pi/M$	-44
Hamming	$8\pi/M$	-53
Blackman	$12\pi/M$	-74
	Vinculado al ancho del lóbulo principal	Vinculado a la amplitud del lóbulo secundario

Diseño del filtro

Ejemplo de diseño analítico:

Diseñar un filtro con las siguientes características:

- Frecuencia de muestreo de la señal a filtrar: 10000 Hz
- Frecuencia de corte: 2500 Hz
- Ripple: 0.003 (0.3 % de variaciones en banda pasante y atenuada)
- Ancho de la banda de transición: 200 Hz

Diseño del filtro

Ejemplo de diseño analítico:

1. Frecuencia de corte en radianes:

$$\theta_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{2\pi 2500}{10000} = \frac{\pi}{2}$$

2. Ripple en decibeles:

$$20\log_{10}\delta = 20\log_{10} 0{,}003 \approx -50 \text{ dB}$$

   Se debe usar una ventana de Hamming o de Blackman para cumplir el requerimiento.

3. Ancho de la banda de transición requerida en radianes:

$$\Delta\theta_m = \frac{2\pi\Delta f_m}{f_s}$$

4. Ancho de la banda de transición del filtro:

$$\Delta\theta = \frac{8\pi}{M}$$

5. Calculo del lago del filtro (M)

$$\Delta\theta \leq \Delta\theta_m \Rightarrow \frac{8\pi}{M} \leq \frac{2\pi\Delta f_m}{f_s} \Rightarrow M \geq \frac{4f_s}{\Delta f_m} = 200.$$

Diseño del filtro

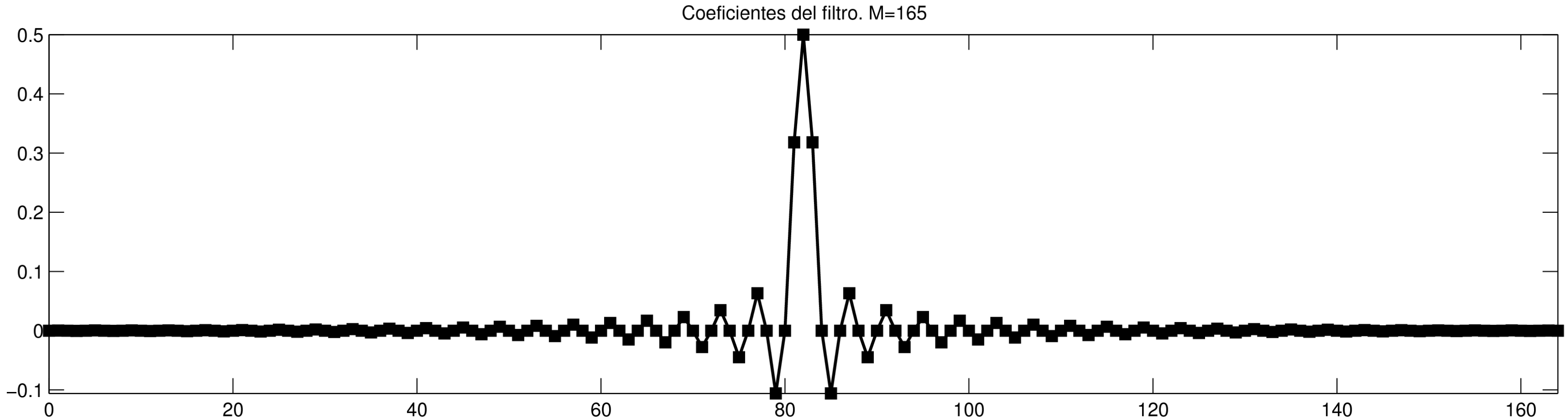
Alternativa 2: Diseño iterativo, partiendo de una ventana de largo mínimo (M=3) e incrementando el largo hasta cumplir los requerimientos.

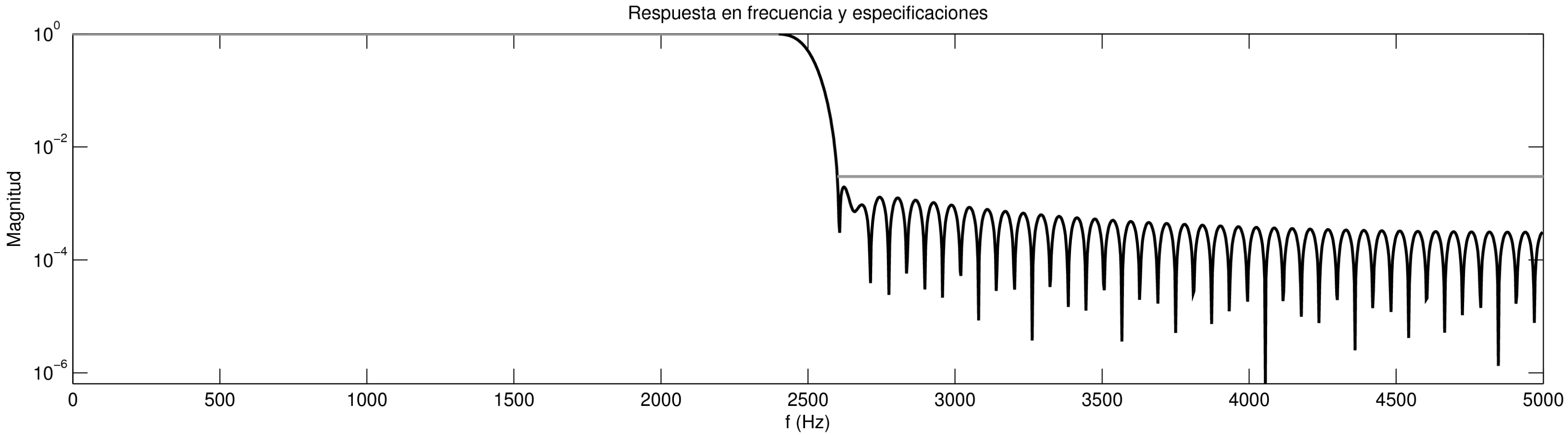
Observaciones

- Si el ripple es permisivo y la banda de transición es estrecha en las especificaciones, conviene emplear ventana rectangular
- Si el ripple es estrecho y la banda de transición es ancha en las especificaciones, conviene emplear ventana de Blackman.
- Si en las especificaciones, el ripple es simétrico en la banda pasante y en la atenuada, la frecuencia de corte se elige en la mitad de la banda de transición.
- Si el ripple no es simétrico, conviene que la frecuencia de corte esté mas cercana a la banda en donde el ripple es mas permisivo.

Diseño del filtro

Mismo ejemplo con diseño iterativo



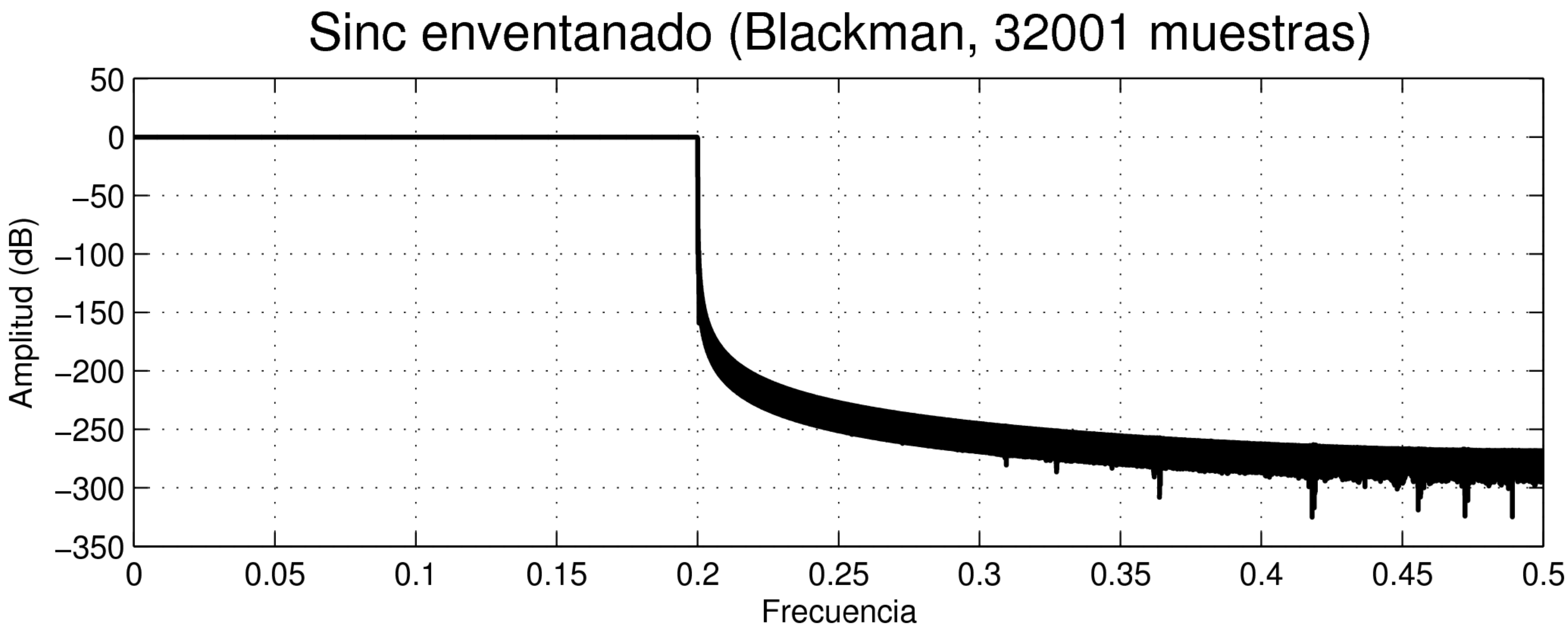


Desempeño del sinc-enventanado

Ejemplo: diseño de suprimebanda con sinc-enventanado

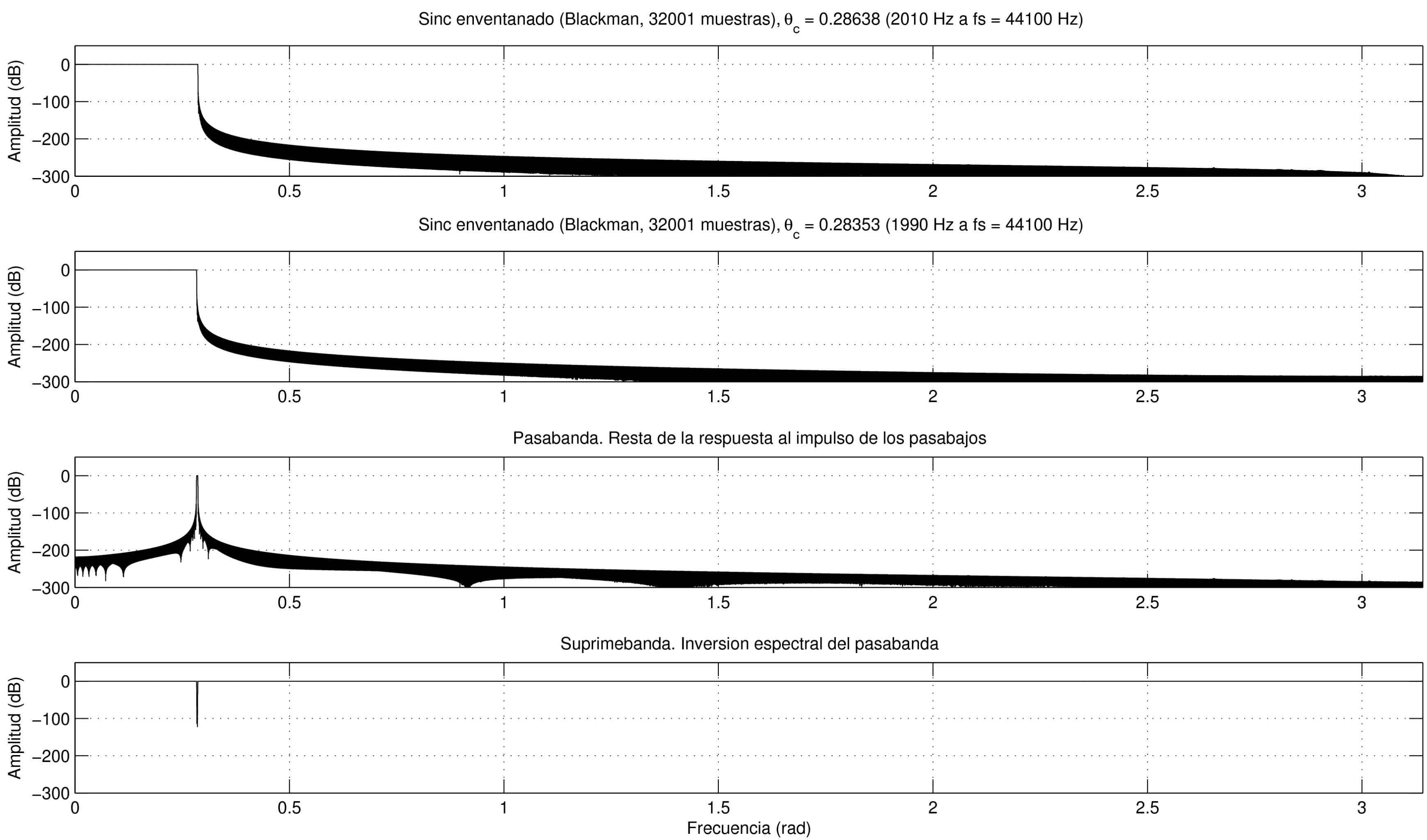
Ventana Blackman con M=32001:

- Ancho de banda de transición: 4 Hz (a fs=44100 Hz)
- Ripple: 0.02 %



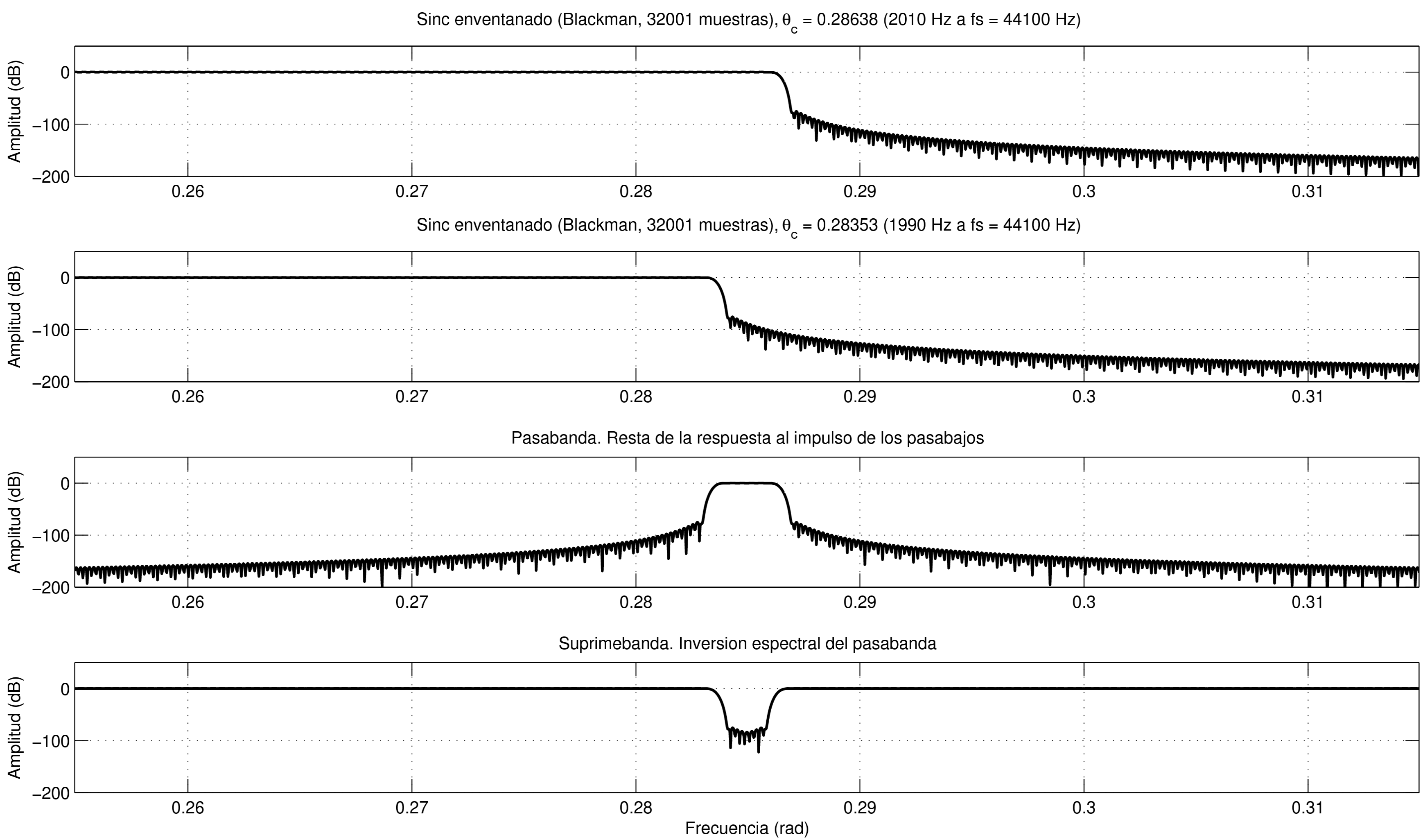
Desempeño del sinc-enventanado

Ejemplo: diseño de suprimebanda con sinc-enventanado



Desempeño del sinc-enventanado

Ejemplo: diseño de suprimebanda con sinc-enventanado



Desempeño del sinc-enventanado

Ejemplo: diseño de suprimebanda con sinc-enventanado

1 - Filtros pasabajos con sinc-enventanado

$$h_{LP_1}[n] = \mathrm{sinc}(\theta_s n) \qquad h_{LP_2}[n] = \mathrm{sinc}(\theta_i n)$$

2 - Filtro pasabanda como resta de los pasabajos

$$h_{BP}[n] = \mathrm{sinc}(\theta_s n) - \mathrm{sinc}(\theta_i n)$$

3 - Filtro suprimebanda con inversión espectral del pasabanda

$$h_{BS}[n] = \mathrm{sinc}(\theta_i n) - \mathrm{sinc}(\theta_s n) + \delta[n]$$

Otras consideraciones

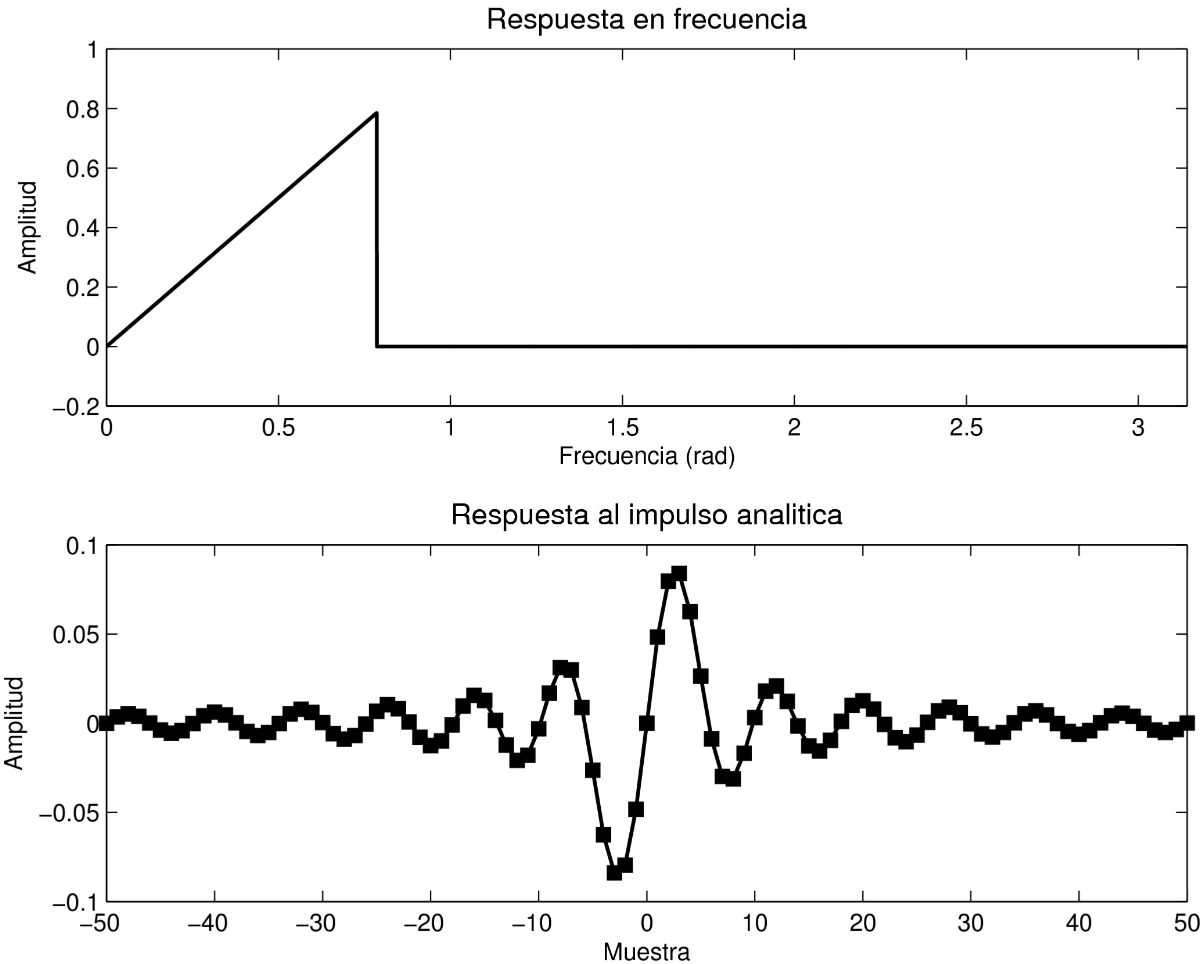
- En el mejor caso, se puede lograr una **atenuación** de 74 dB (con Blackman). Para tener mas atenuación, se pueden realizar múltiples filtrados. Filtrando 2 veces con un filtro enventanado con Blackman, se llega a 148 dB.
- El **tiempo de ejecución** es proporcional al largo del filtro M. Para realizar el filtrado conviene emplear la convolución usando la FFT en los casos de filtros con M grande.
- Con los filtros sinc-enventanado, se puede lograr cualquier desempeño que se desee.
- La respuesta en fase es lineal, en contraposición a otros tipos de filtros de buen desempeño (IIR).
- El retardo es *M/2* muestras, puede ser limitante en aplicaciones de tiempo real.
- El método se puede generalizar para crear cualquier filtro del que se conozca la respuesta al impulso.

Generalización

Dada la respuesta en frecuencia analítica, en algunos casos es posible calcular la DTFT inversa para obtener la respuesta al impulso analítica. Ésta se enventana y desplaza para construir un filtro FIR causal.

$$H(\theta) = \begin{cases} -j\theta & \text{si } |\theta| \leq \theta_c \\ 0 & \text{si } \theta_c < |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin(\theta_c n) - \theta_c \cos(\theta_c n)\right]$$



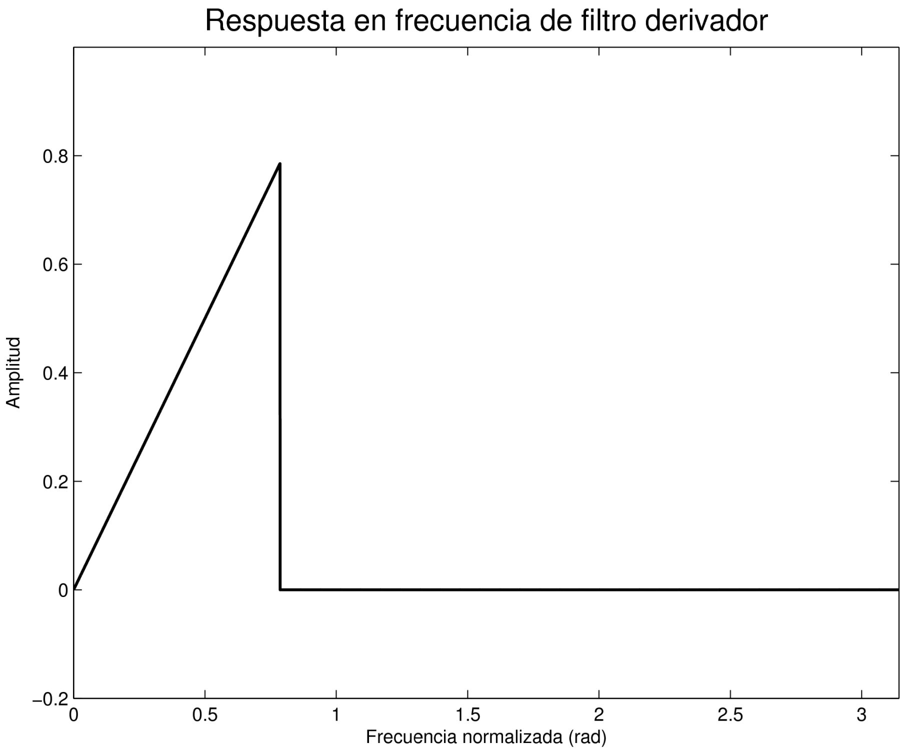
Diseño de filtros personalizados

Filtros personalizados

Situación 1: se conoce la expresión analítica de la respuesta en frecuencia, pero puede ser difícil calcular la respuesta al impulso a través de la DTFT inversa.

Ejemplo: Filtro derivador pasabajos

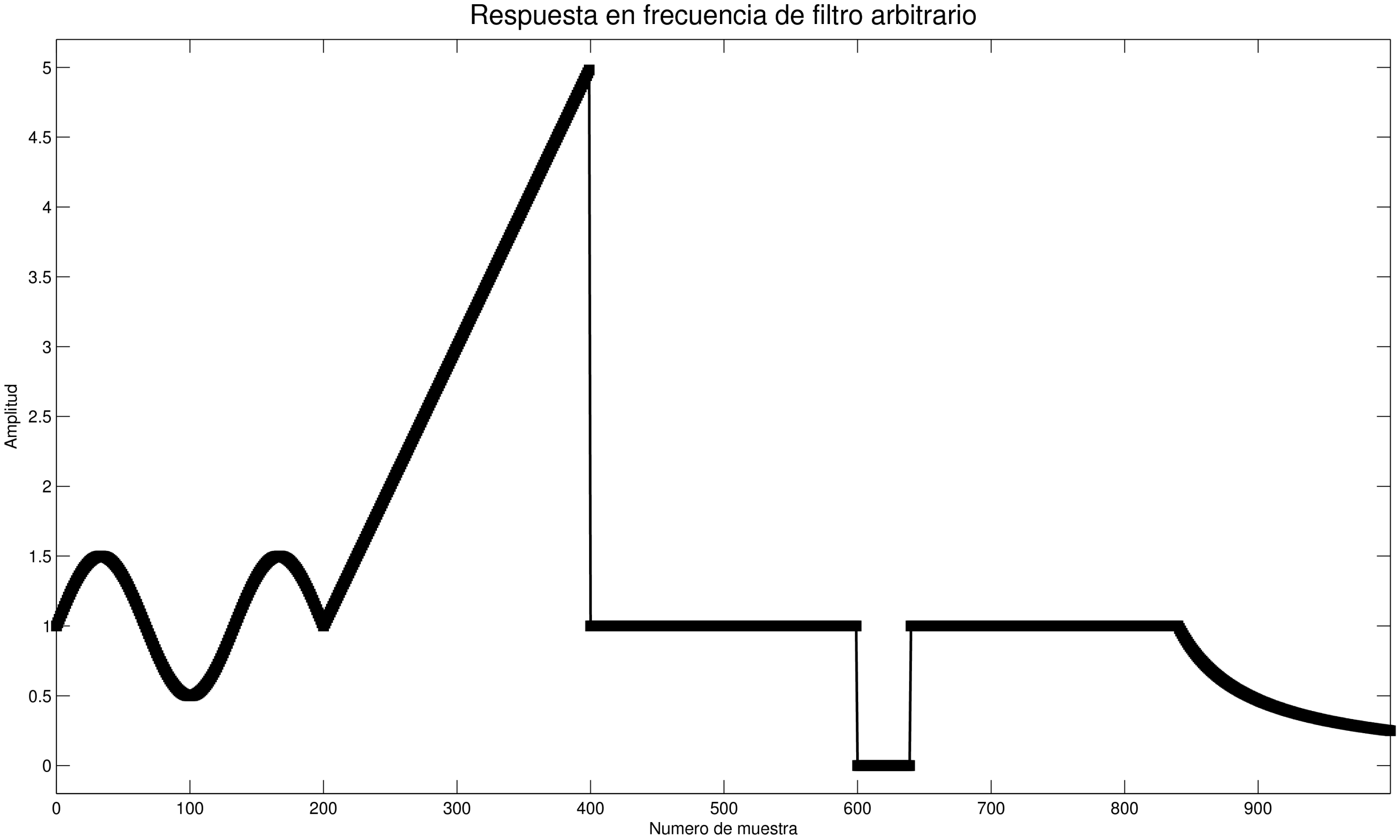
$$H(\theta) = \begin{cases} -j\theta & \text{si } |\theta| \leq \theta_c \\ 0 & \text{si } \theta_c < |\theta| \leq \pi \end{cases}$$



Filtros personalizados

Situación 2: no hay una expresión analítica para la respuesta en frecuencia. Solo se conoce la secuencia de muestras.

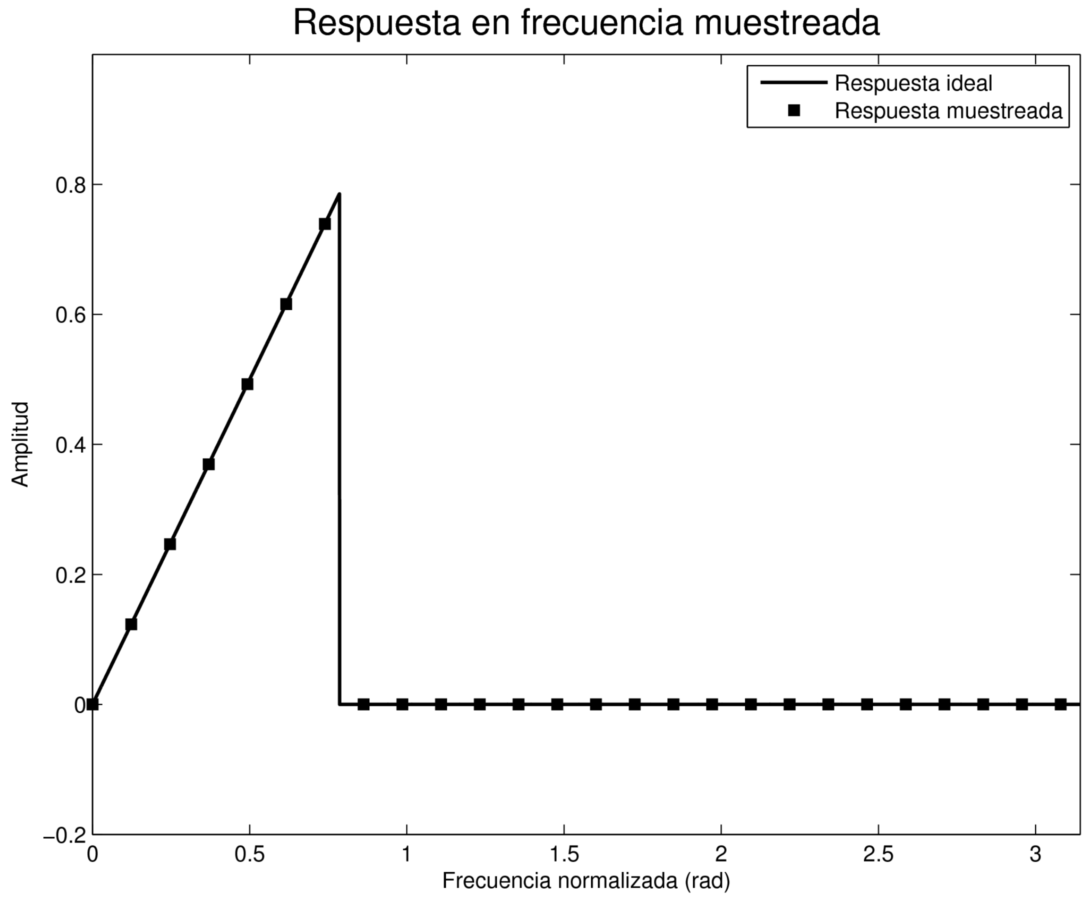
Ejemplo: Filtro arbitrario dado por las muestras de la DFT.



Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia

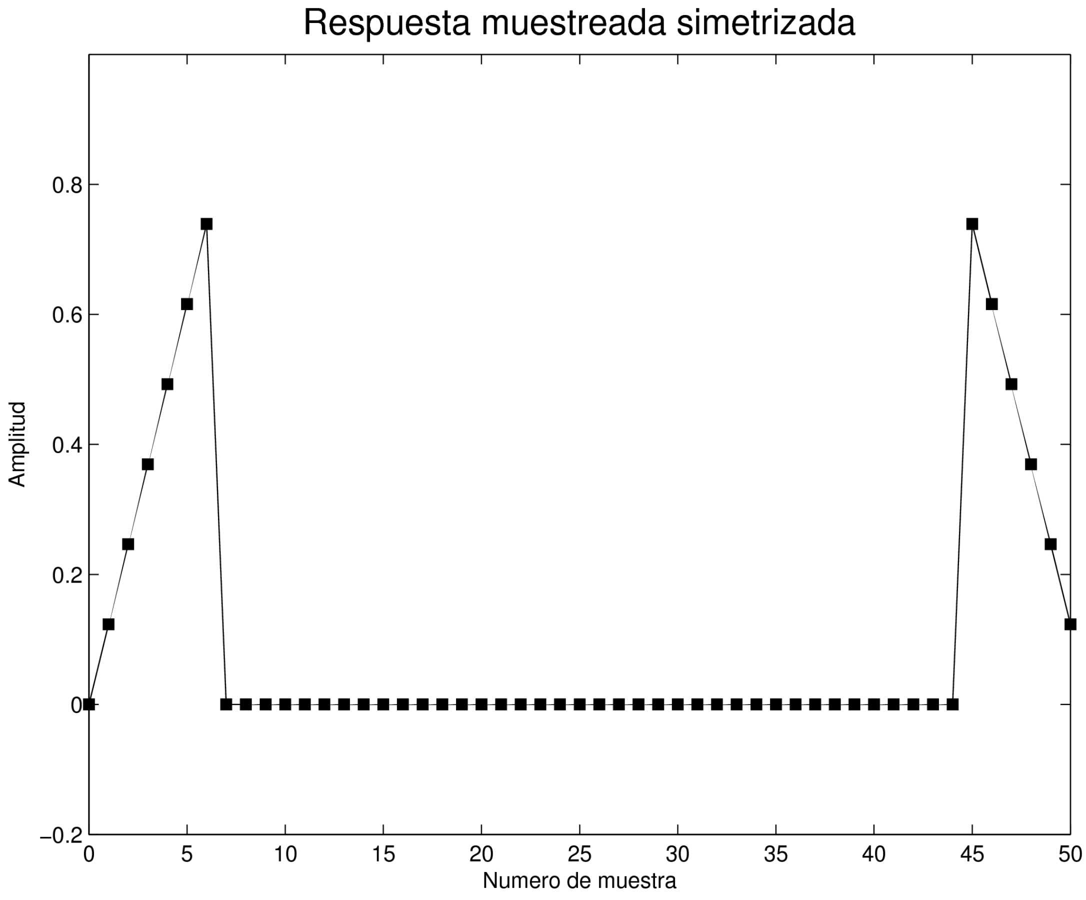
1 – Se toman *M+1* muestras equiespaciadas a partir de la expresión analítica en la región de frecuencias positivas entre 0 y pi.



Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia

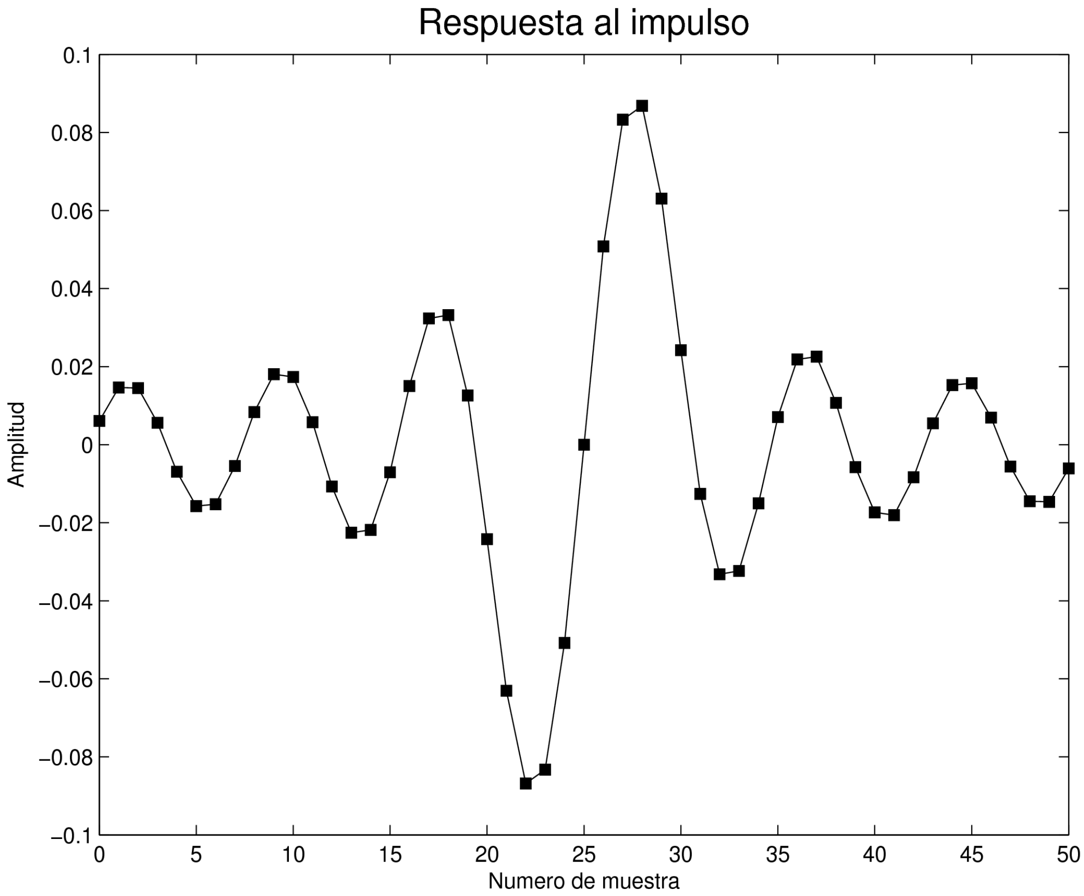
2 – Se simetriza el espectro en la región de frecuencias entre pi y 2pi. Se obtienen *2M+1* muestras



Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia

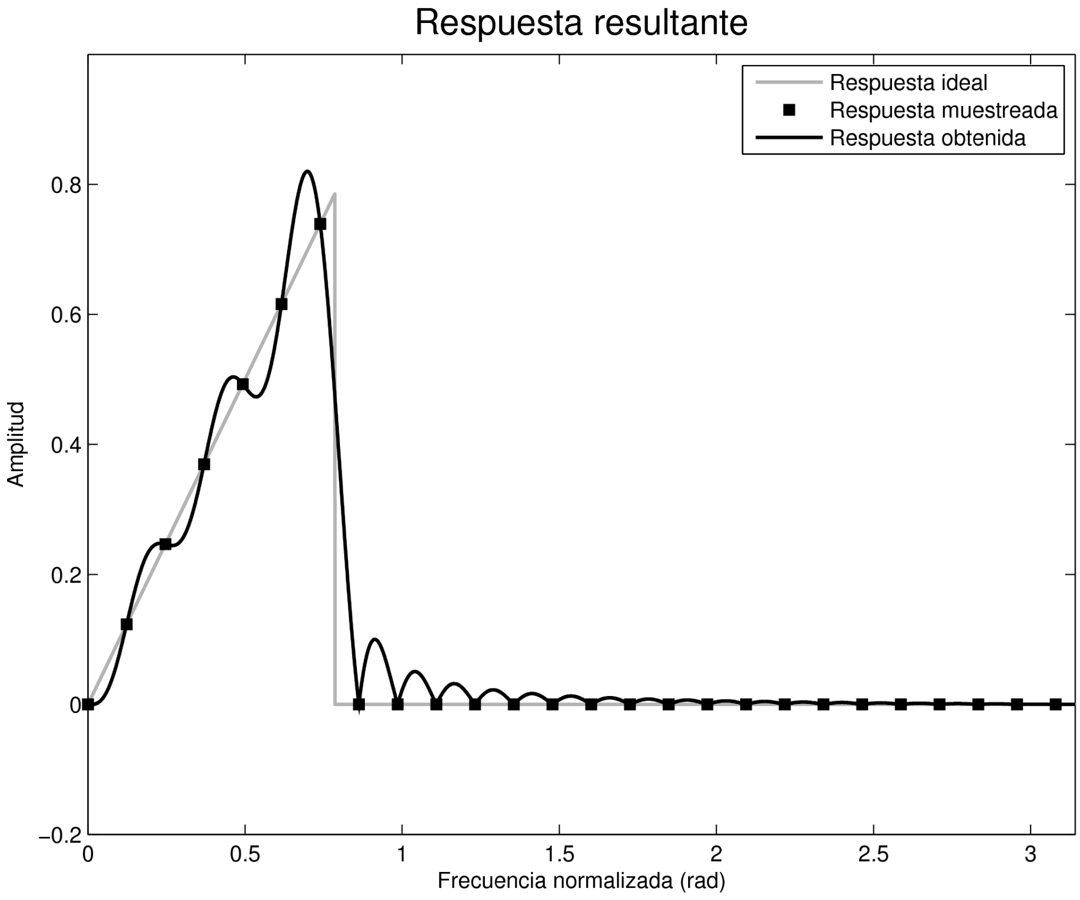
3 – Se calcula la DFT inversa para obtener la respuesta al impulso.



Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia

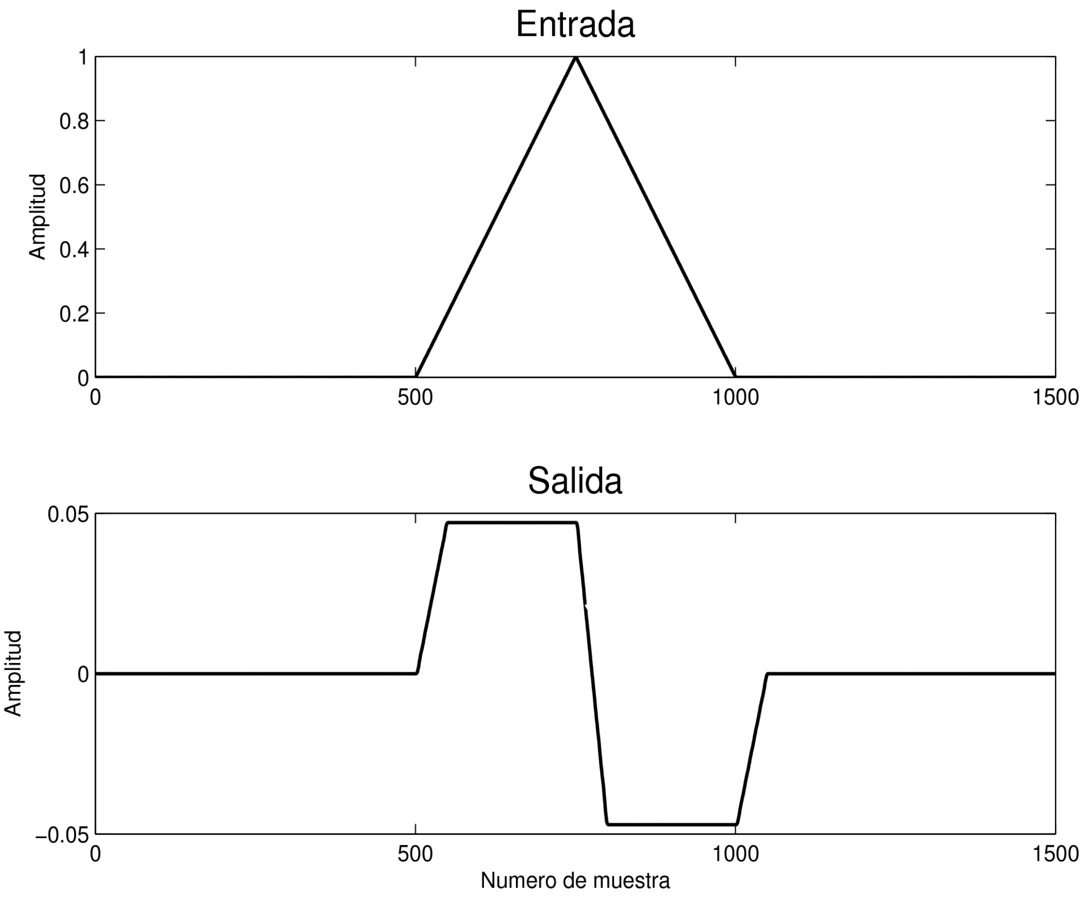
4 – Se prueba la respuesta obtenida calculando la DFT de la respuesta al impulos con relleno de ceros.



Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia

Ejemplo de filtrado con el derivador diseñado



Filtros personalizados

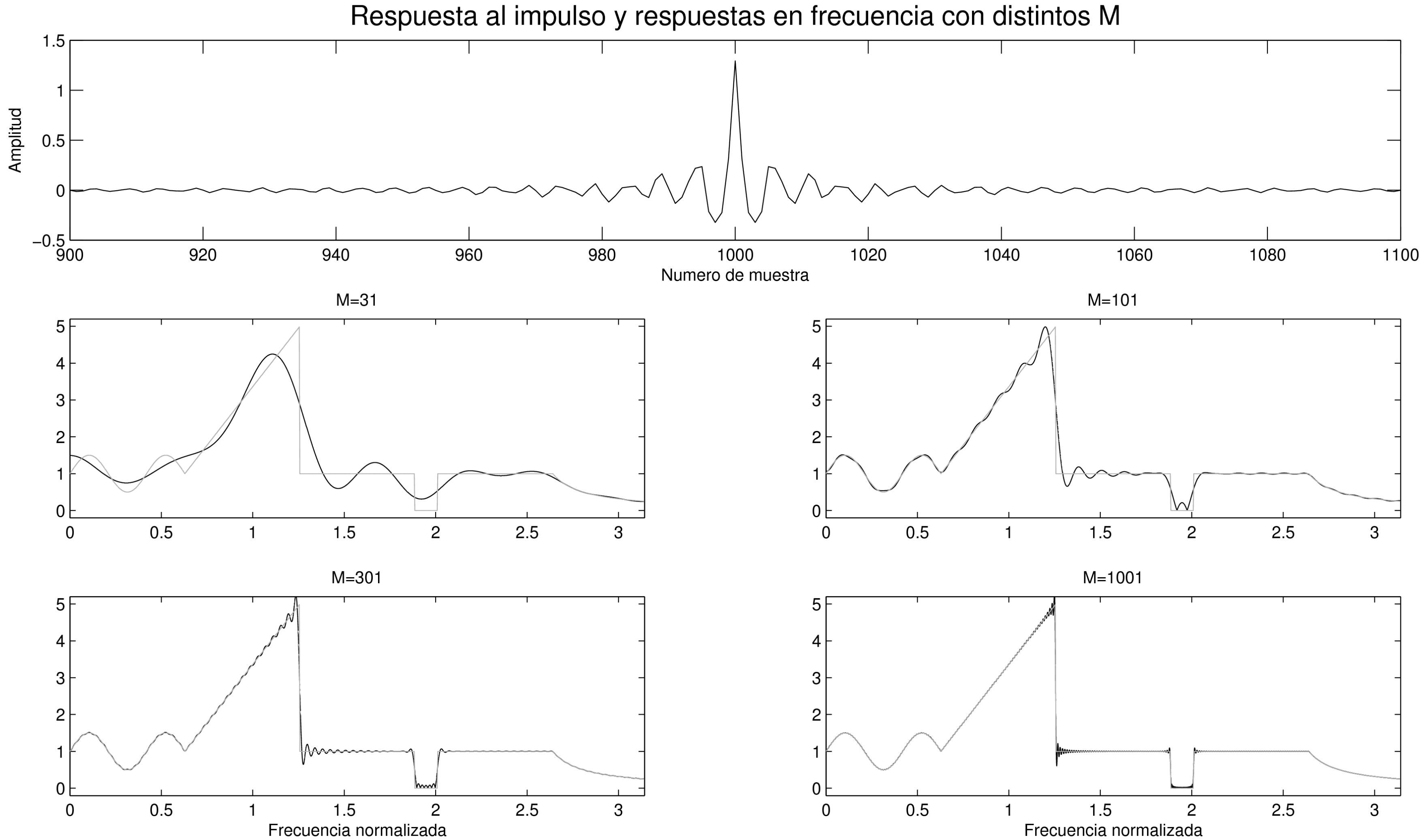
Muestreo en frecuencia – Espectro definido por las muestras

1 – Se calcula la respuesta al impulso con la DFT inversa, teniendo cuidado de realizar el simetrizado apropiado.

2 – Se trunca y se enventana la respuesta al impulso.

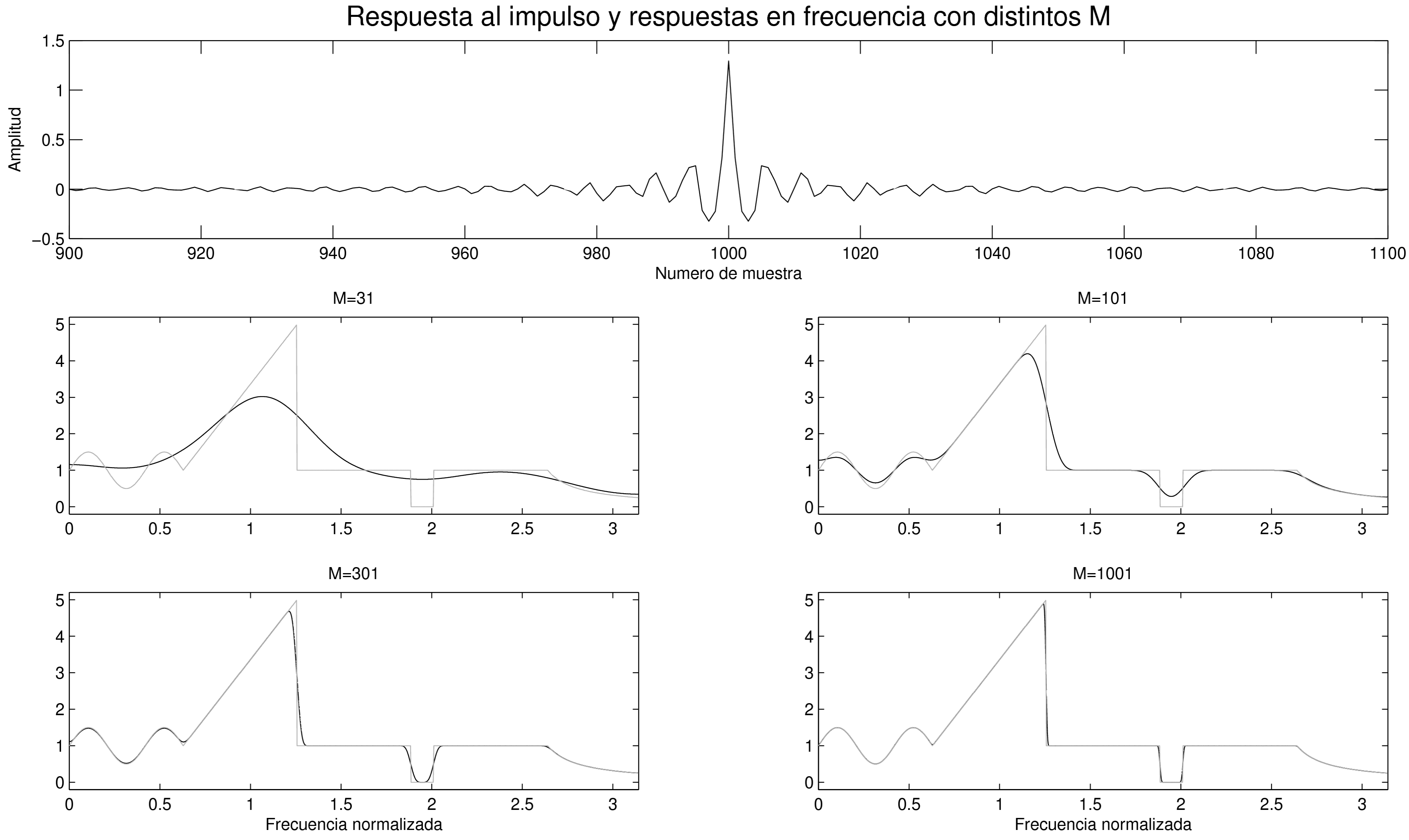
Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia - Ejemplo de espectro arbitrario.



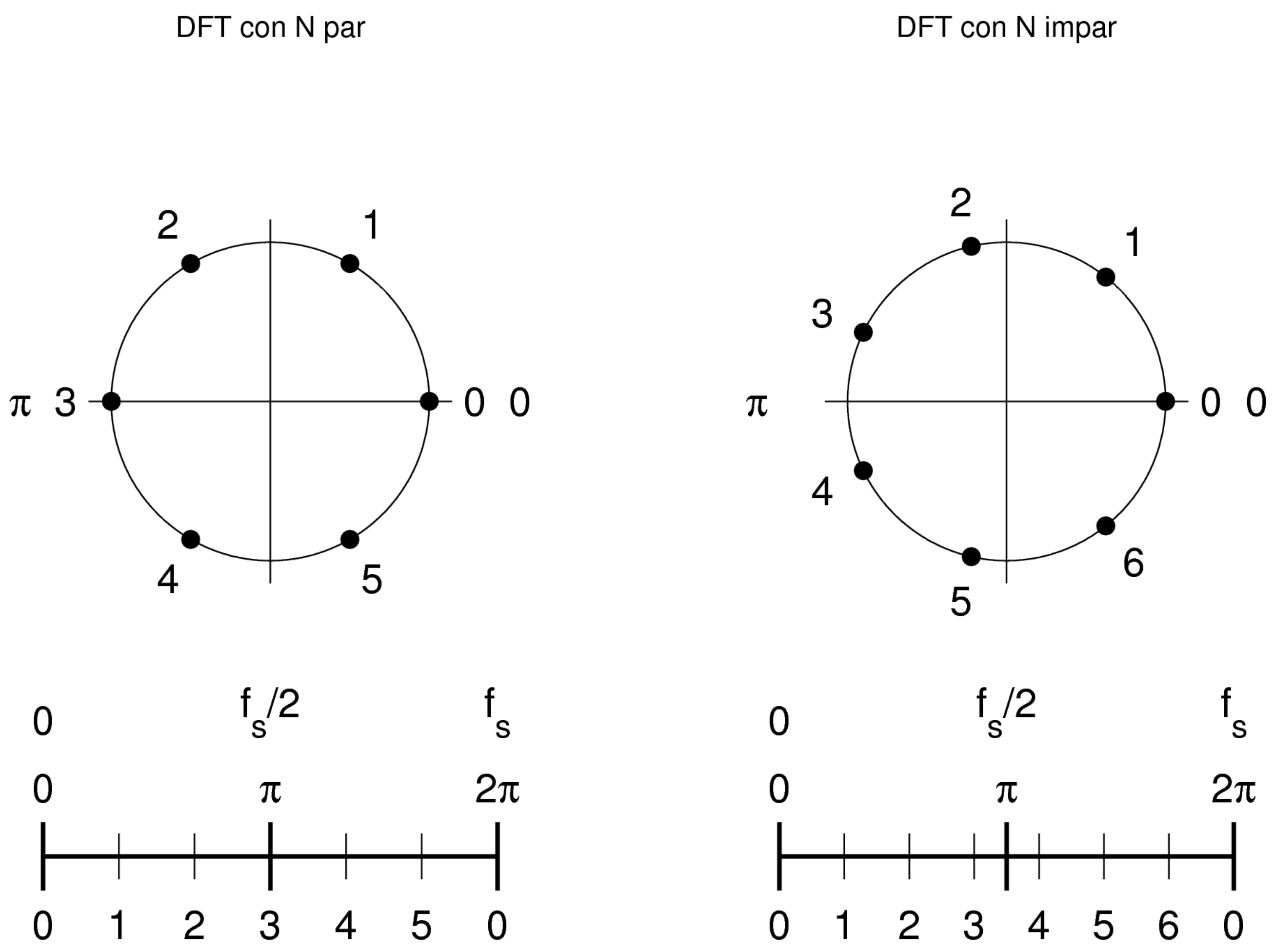
Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia - Ejemplo de espectro arbitrario.



Filtros personalizados

Muestreo en frecuencia – Consideración sobre el simetrizado.



Filtros personalizados

Observaciones

- La técnica de muestreo en frecuencia es muy potente. Permite obtener la respuesta al impulso de un filtro con cualquier respuesta en frecuencia deseada.
- Implica un compromiso entre el largo del filtro y la precisión de la respuesta en frecuencia.
- Puede usarse enventanado para atenuar el impacto del ripple.

Bibliografía

- Smith, S.W., “*The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing*”, 1997, California Technical Pub.
    - Cap. 16: Filtros sinc enventanado
    - Cap. 17: Filtros personalizados

- Oppenheim, Alan V., “*Discrete-Time Signal Processing*”, Prentice Hall; 2 ed., 1999.
    - Cap. 7: Técnicas de diseño de filtros