Transformada Z
Filtros recursivos

clase 12

Temas

- Introducción a los filtros digitales

  Clasificación, Caracterización, Parámetros
- Filtros FIR (Respuesta al impulso finita)

  Filtros de media móvil, filtros senoc enventanado,

  filtros personalizados
- **Transformada Z**
- **Filtros IIR (Respuesta al impulso infinita o recursivos)**
- Respuesta en fase
- Filtros Chebyshev
- Comparación de desempeño
- Ejemplos: Filtros peine, filtros pasatodo
- Aplicaciones: síntesis de cuerda pulsada, reverberadores, efectos

Transformada Z

Introducción

- La transformada Z es una herramienta para el análisis y representación de señales y sistemas en tiempo discreto.
- Mientras mediante la transformada de Fourier se analiza una señal en términos de sinusoides, mediante la transformada Z se analiza una señal en términos de sinusoides y exponenciales. Es una generalización de la Transformada de Fourier.
- La salida de una ecuación en recurrencia (filtro IIR) es una combinación lineal de exponenciales y sinusoides. De aquí la utilidad de la transformada Z para el análisis de filtros IIR.
- Mediante la transformada Z es posible obtener de forma sencilla la relación entre los coeficientes de recursión, la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso, combinar sistemas en serie y en paralelo en un solo filtro o diseñar filtros recursivos que tengan una respuesta en frecuencia deseada manejando álgebra convencional (suma y productos de polinomios).

Funciones

Función de una variable

A cada número real x (*argumento de la función*), le asocia un valor único (*valor de la función*). Se representa gráficamente mediante un dibujo en donde a cada punto de una **recta**, se le asocia un número. El dibujo de la función define una **curva**.

Función de dos variables

A cada par de números reales (x,y), le asocia un único número real. Los pares de puntos (x,y) definen un plano. Se representa gráficamente mediante un dibujo en donde a cada punto de un **plano**, se le asocia un número. El dibujo de la función define una **superficie**.

Funciones

Ejemplos

Función de una variable

$$f(x) = x^3 - 3x + 10$$

Evaluación en x=1

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 - 3(1) + 10 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Función de dos variables

$$g(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y + 10$$

Evaluación en (x,y)=(1,-2)

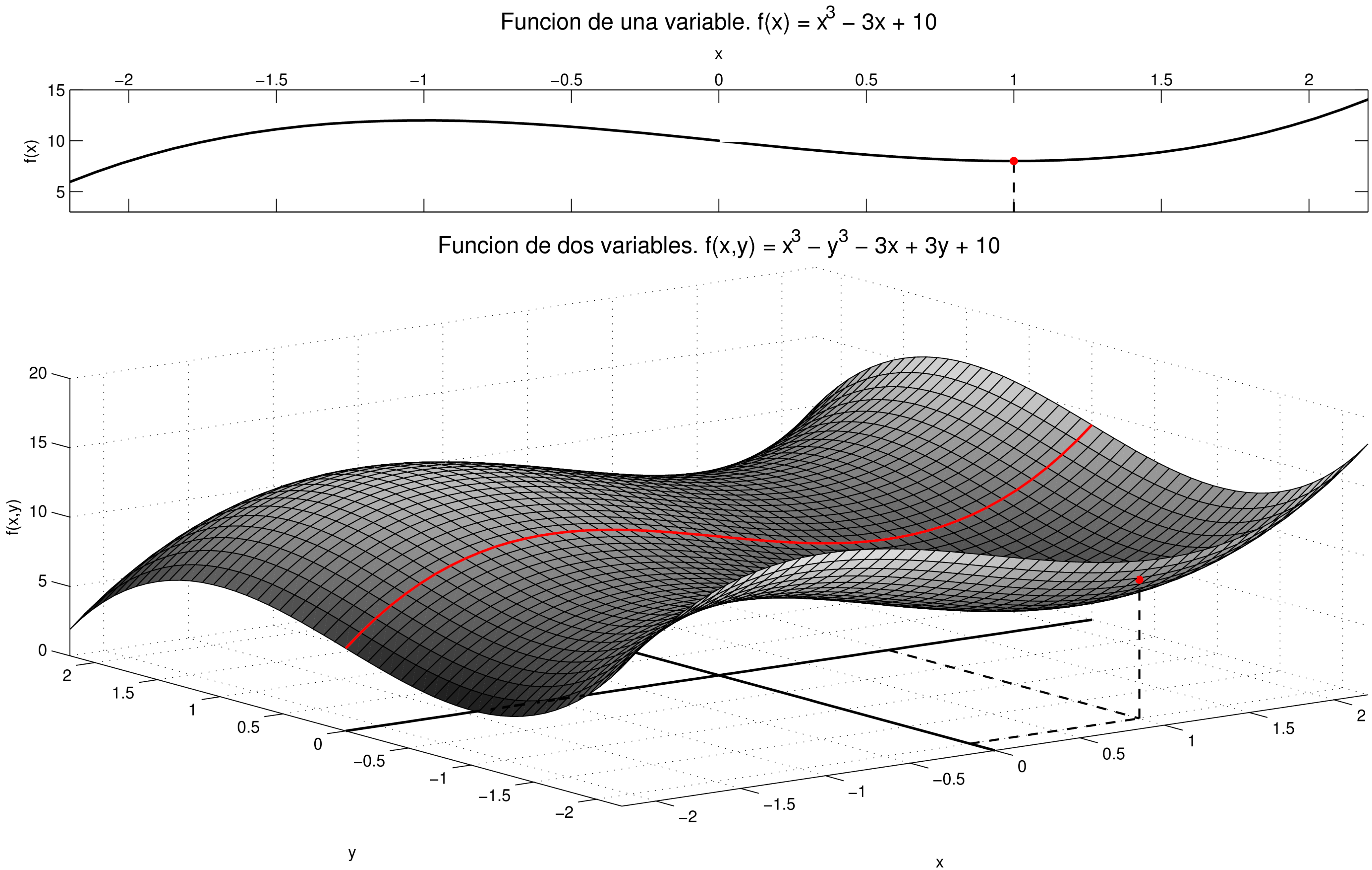
$$\begin{aligned} g(1, -2) &= (1)^3 - (-2)^3 - 3(1) + 3(-2) + 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Evaluación en la recta y=0

$$g(x, 0) \equiv f(x)$$

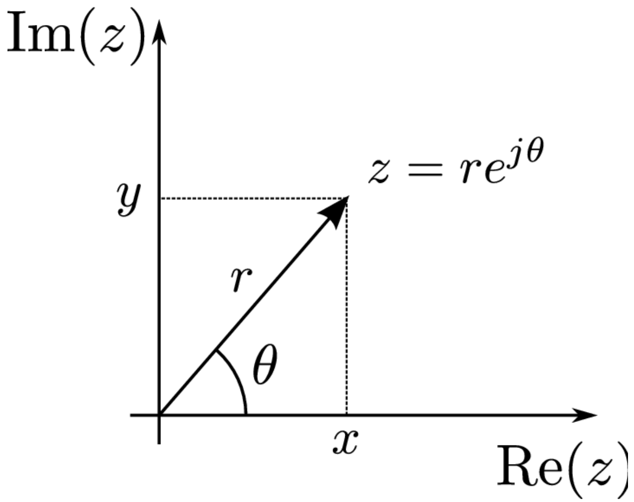
Funciones

Ejemplos



Funciones de variable compleja

- Una función de variable compleja le asocia un valor único (complejo) a cada número complejo *z*.
- Los números complejos se pueden ver como un par de números reales (parte real y parte imaginaria o módulo y fase), y se representan en un plano, el plano complejo.
- Una función de variable compleja es análoga a una función de dos variables reales, ya que a cada punto del plano complejo le asigna un valor. La diferencia es que éste valor es un número complejo, o equivalentemente, dos números reales.
- Una función de variable compleja se representa gráficamente como 2 superficies, una correspondiente al módulo y la otra correspondiente a la fase.



Funciones de variable compleja

Ejemplo

$$f(z) = \frac{z}{z-a}, \quad z \in \mathcal{C}$$

Coordenadas rectangulares

Se sustituye *z* por

$$z = x + jy$$

y queda una función compleja de 2 variables

$$f(x,y) = \frac{x+jy}{x-a+jy}$$

El módulo es una función de 2 variables:

$$|f(x,y)| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}$$

Coordenadas polares

Se sustituye *z* por

$$z = re^{j\theta}$$

y queda una función compleja de 2 variables

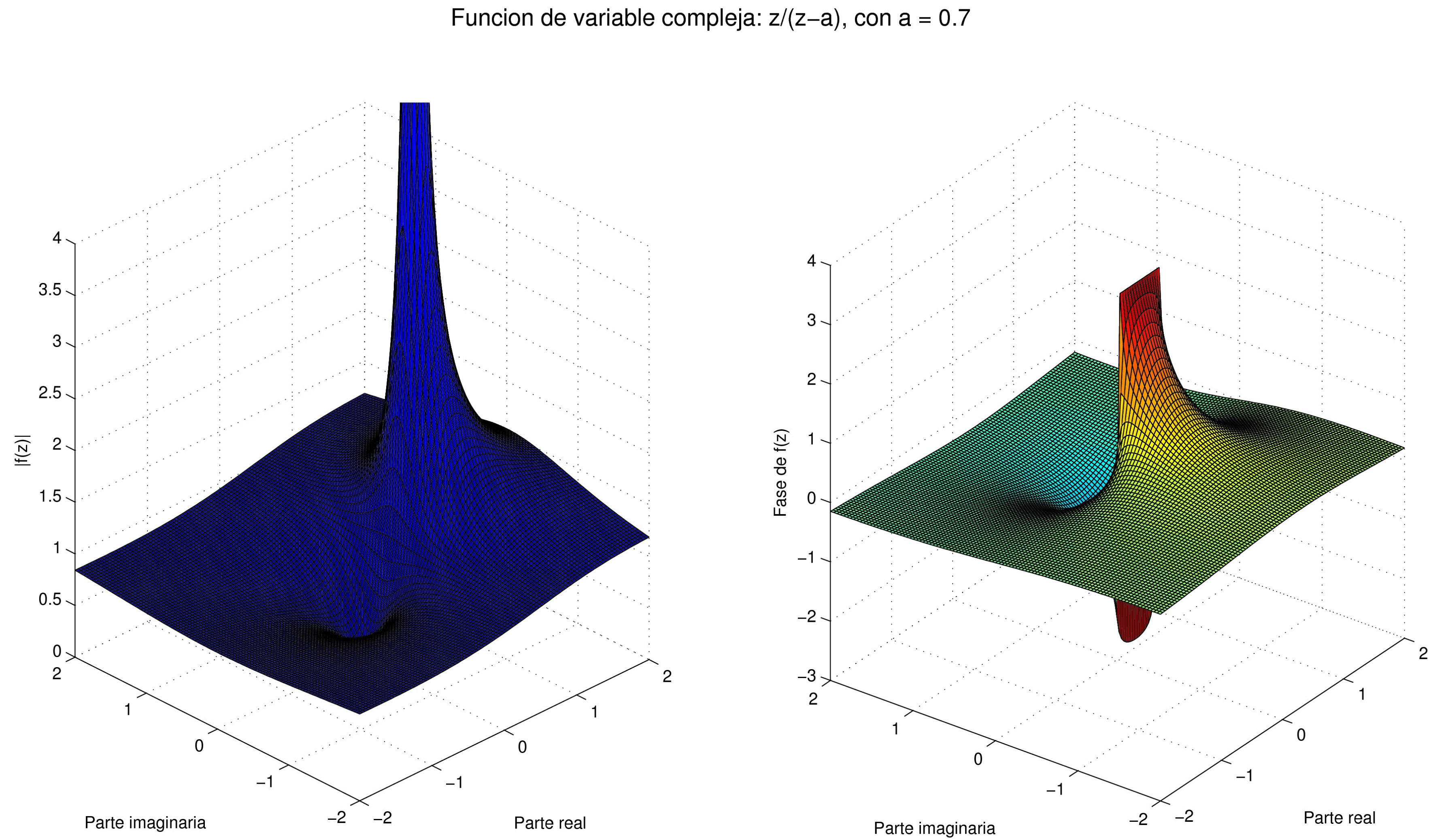
$$f(r,\theta) = \frac{re^{j\theta}}{re^{j\theta}-a}$$

El módulo es una función de 2 variables:

$$|f(r,\theta)| = \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos(\theta)}}$$

Funciones de variable compleja

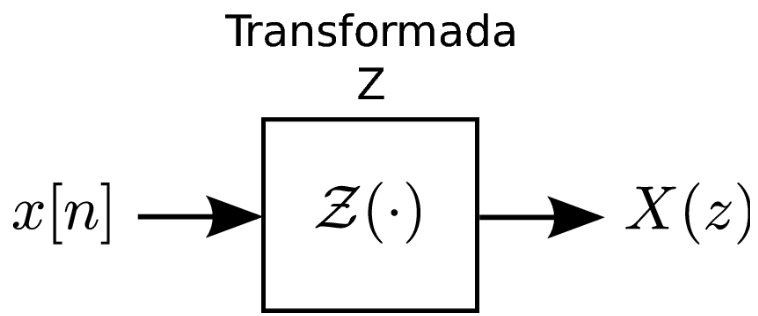
Ejemplo



Transformada Z - Definición

La **transformada Z** transforma una secuencia temporal *x[n]* en una función *X(z)* de variable compleja.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$



Interpretación

Interpretación como análisis en sinusoides y exponenciales

Expresando z en notación polar,

$$z = re^{j\theta},$$

y observando que

$$z^{-n} = r^{-n}e^{-j\theta n} = r^{-n}(\cos(\theta n) - j\sin(\theta n))$$

la transformada Z se puede escribir como,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}(\cos(\theta n) - j\sin(\theta n)).$$

Por lo tanto, la parte real y la parte imaginaria de la transformada Z en el punto del plano complejo $z = re^{j\theta}$ se calculan respectivamente como

$$\mathrm{Re}\,(X(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}\cos(\theta n)$$

$$\mathrm{Im}\,(X(z)) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}\sin(\theta n).$$

Interpretación

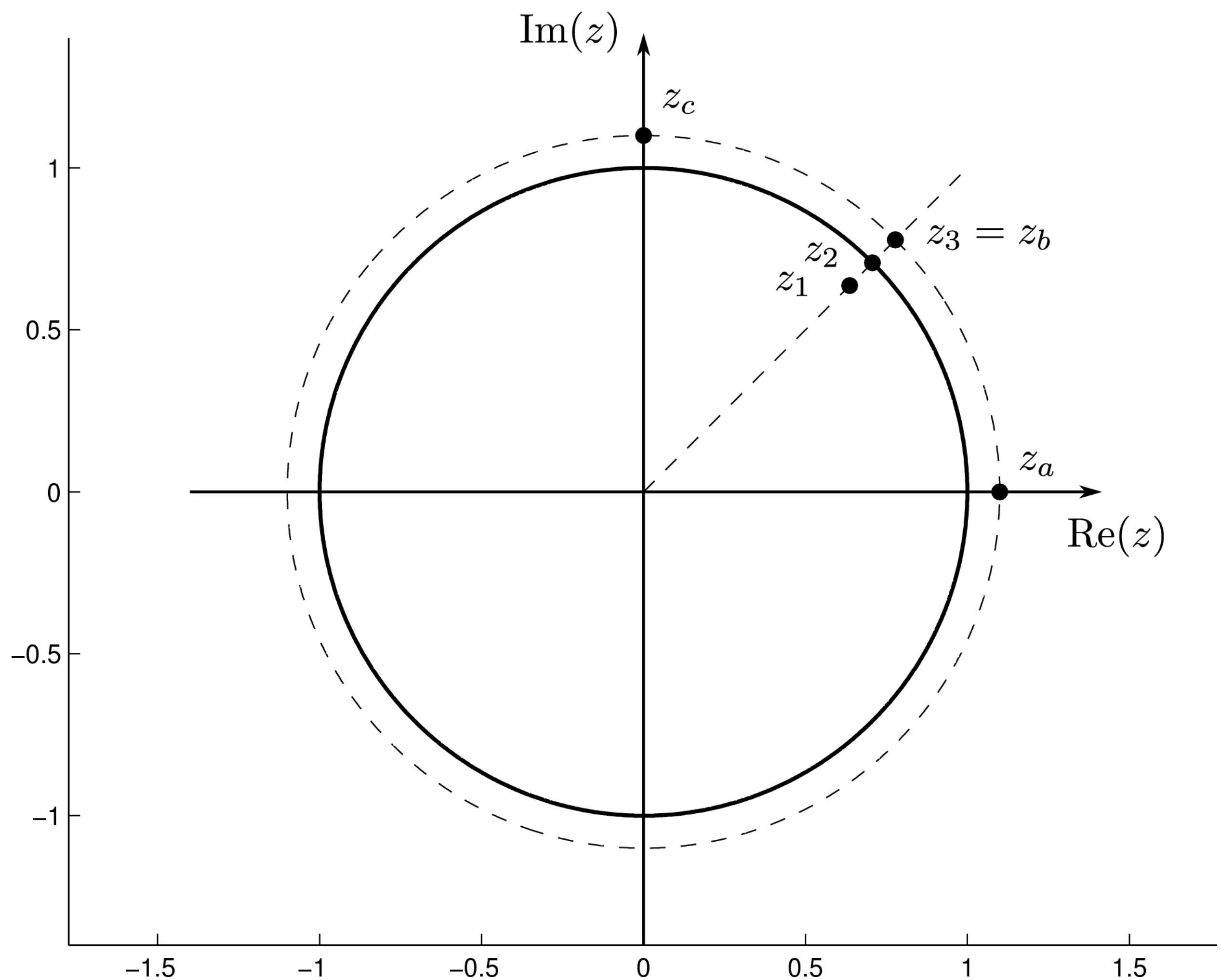
Interpretación como análisis en sinusoides y exponenciales

Para calcular la transformada Z de una secuencia x[n] en cierto punto del plano complejo z, se hace los siguiente:

- Se construye una secuencia de prueba p[n] que consiste en una sinusoide con envolvente exponencial. La base de la exponencial y la frecuencia de la sinusoide son respectivamente el módulo y la fase del complejo z.
- Se multiplica la secuencia x[n] con la secuencia de prueba p[n].
- Se suman todas las muestras del producto

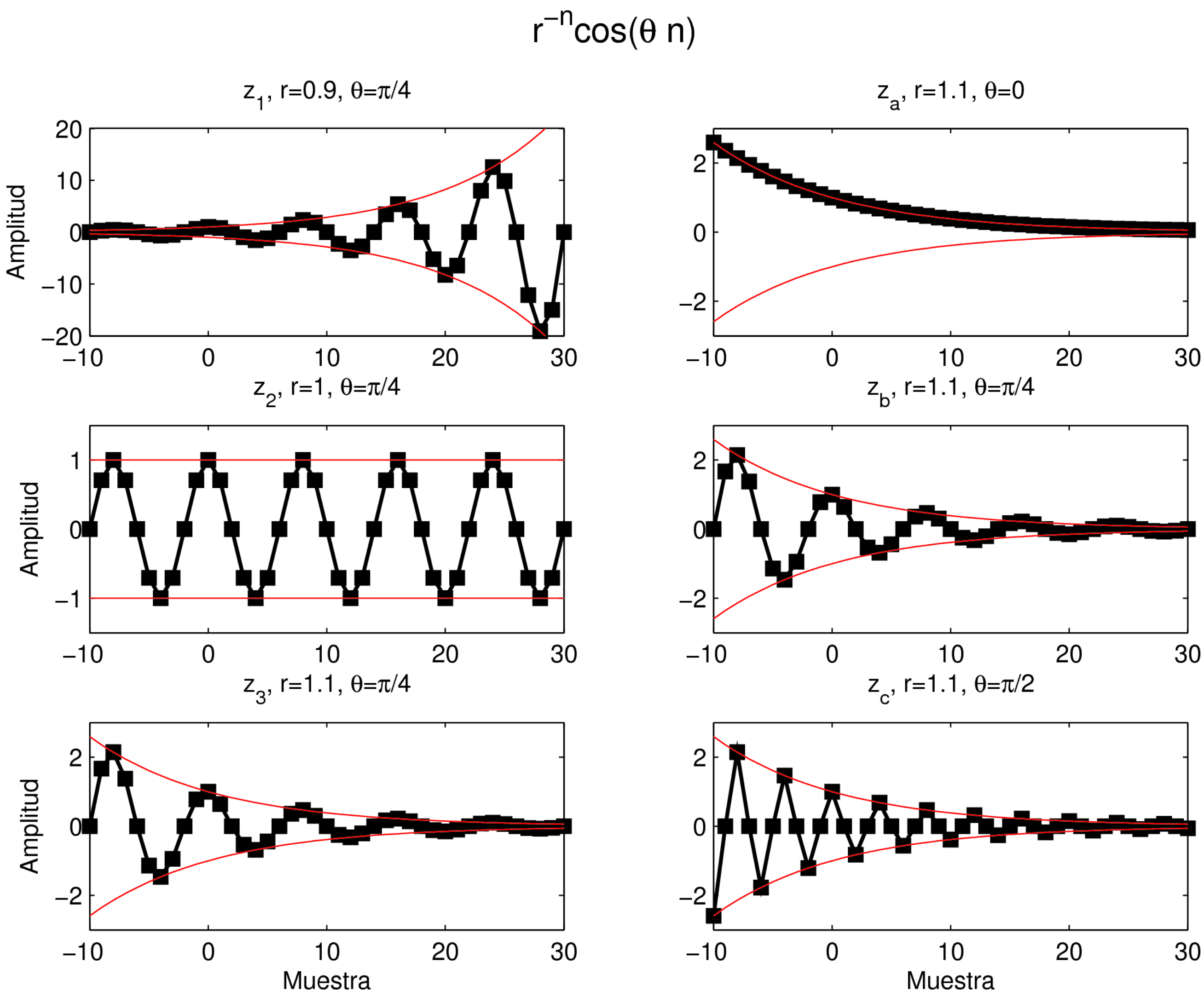
Interpretación

Interpretación como análisis en sinusoides y exponenciales



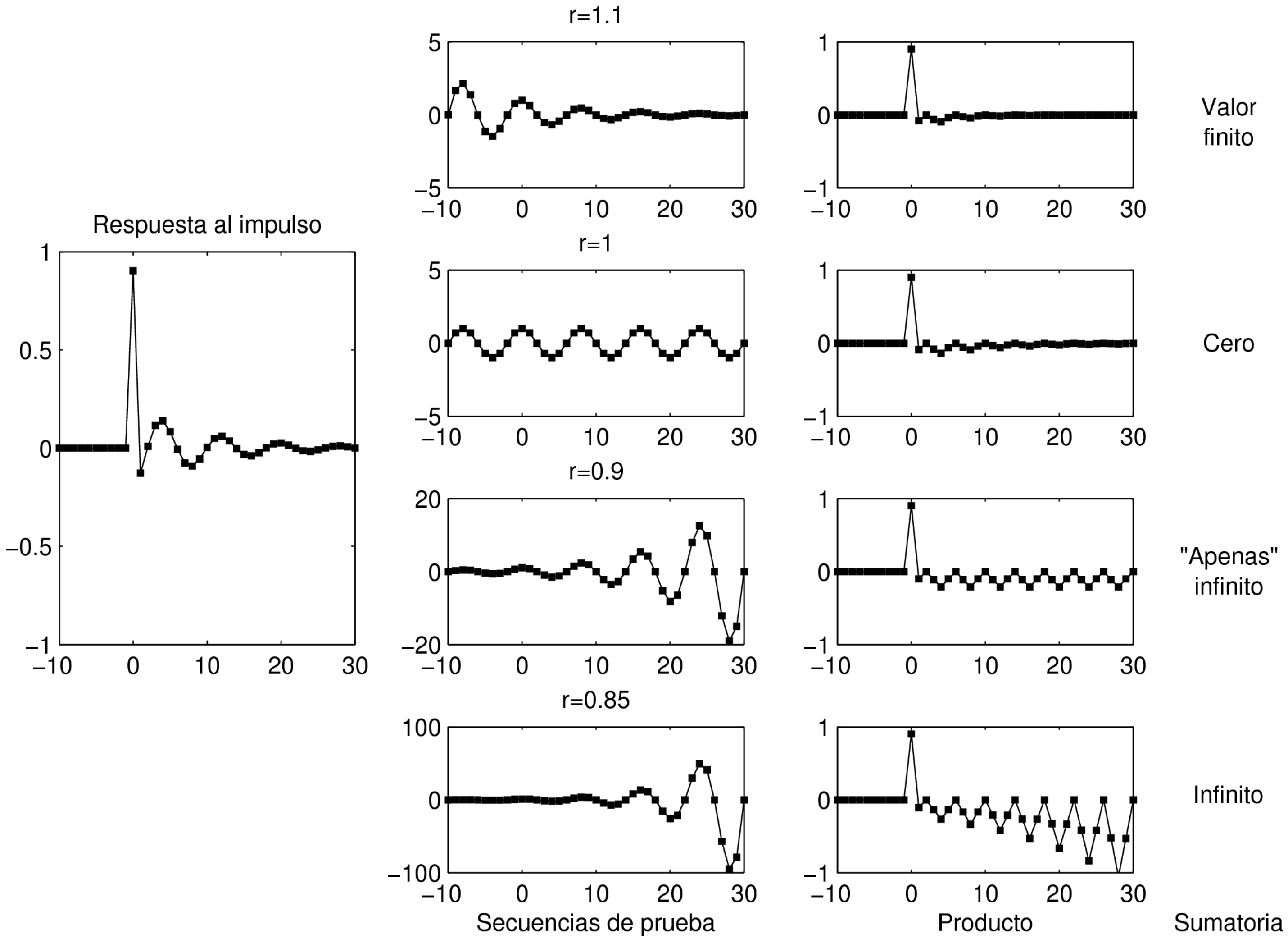
Interpretación

Interpretación como análisis en sinusoides y exponenciales



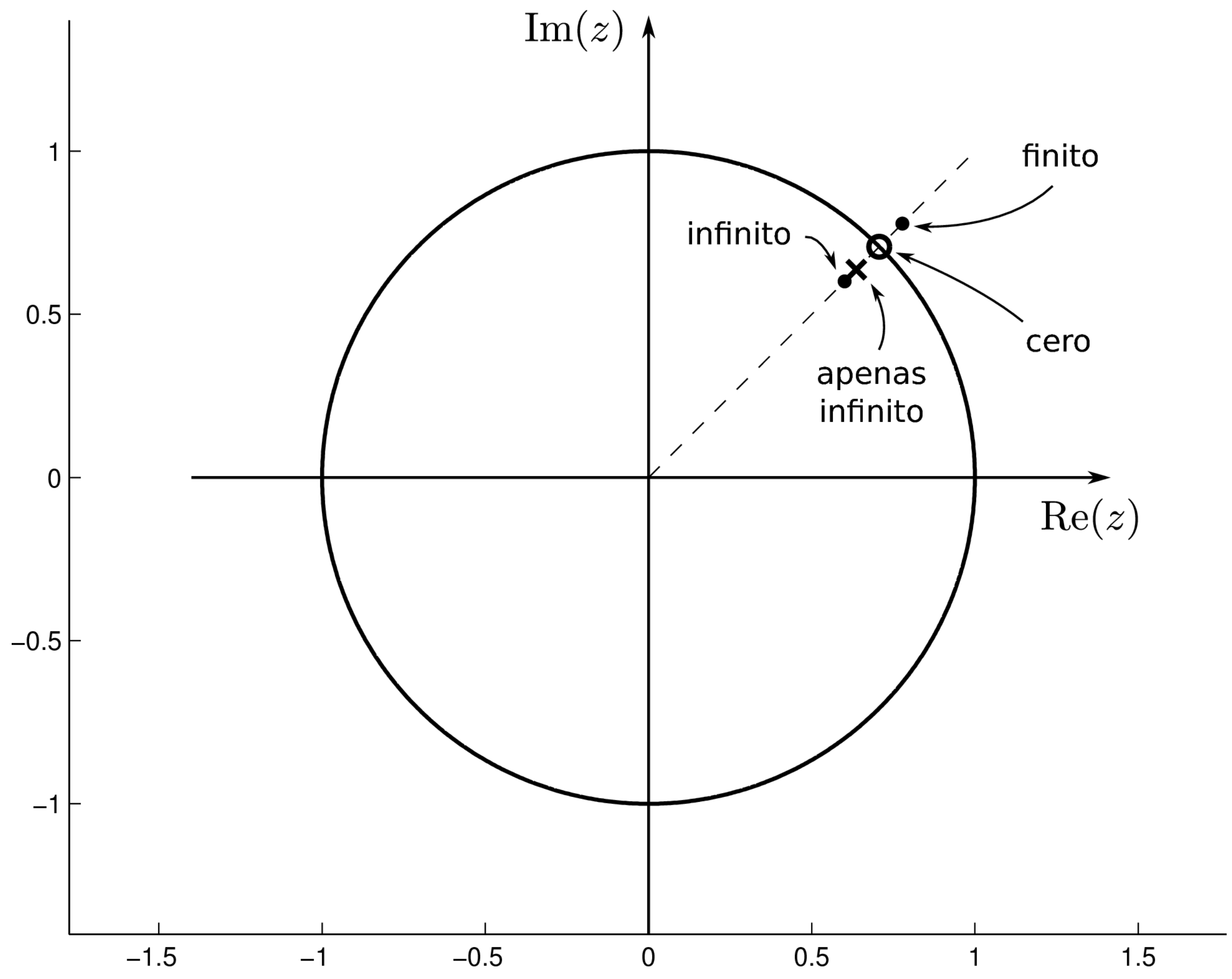
Interpretación

Ejemplo



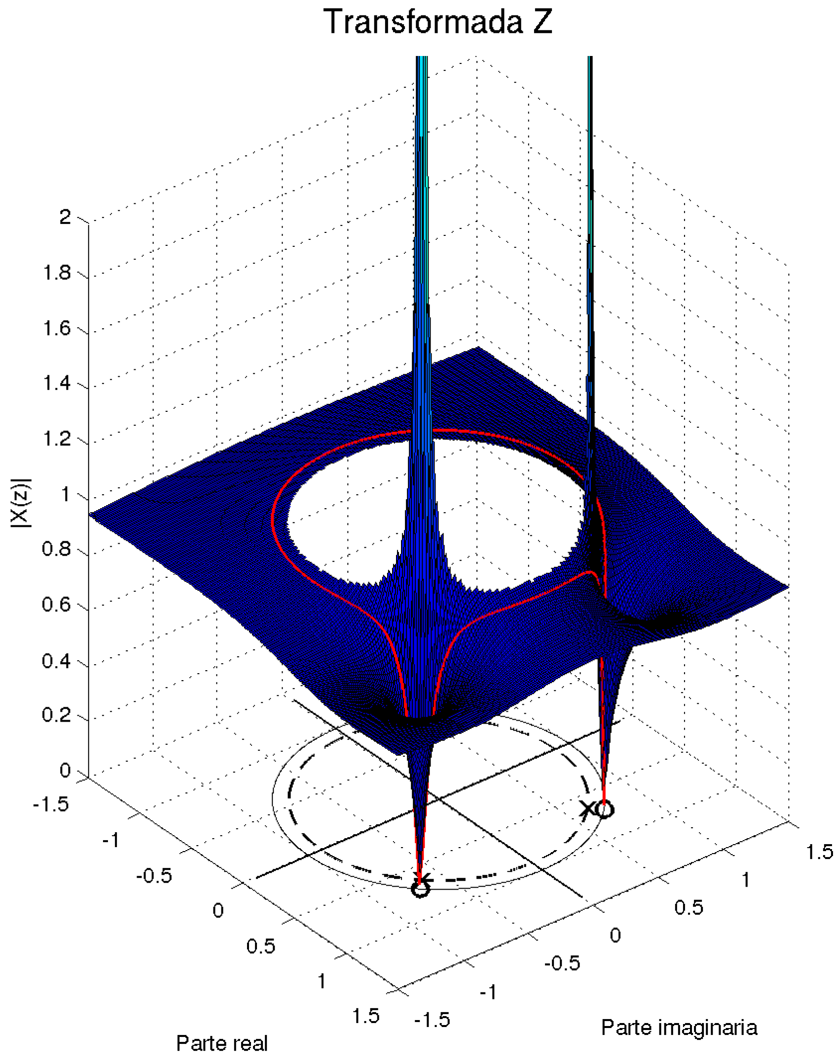
Interpretación

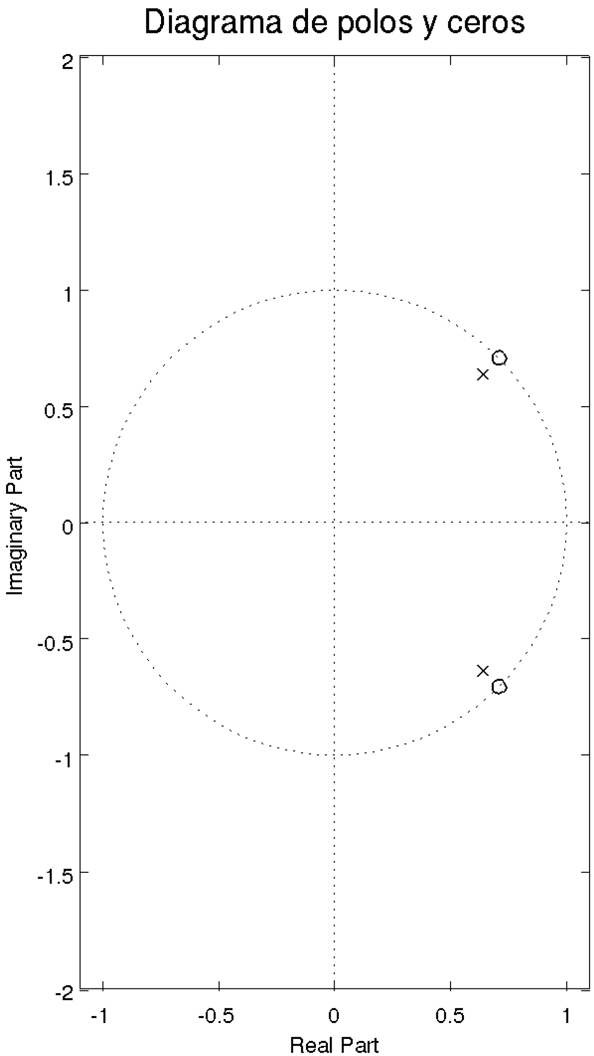
Ejemplo



Interpretación

Ejemplo





Interpretación

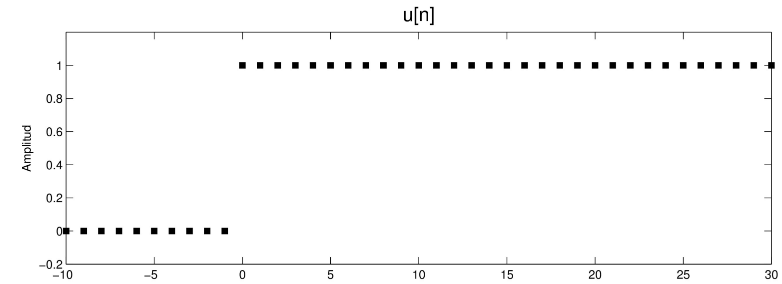
Observaciones

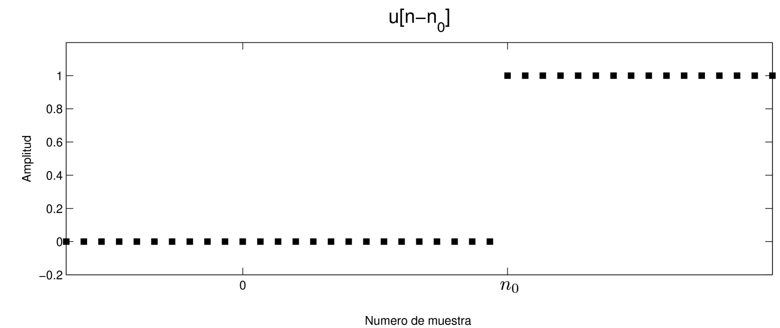
- La transformada Z de una secuencia toma valores finitos, cero o infinito en distintos lugares del plano complejo.
- En los puntos denominados como “apenas infinito”, la transformada Z no converge, pero indican el límite de la convergencia. En los puntos del plano con módulo infinitesimalmente mayor, hay convergencia. En los puntos del plano con módulo inferior, no hay convergencia.
- Los puntos interesantes de la transformada Z son aquellos donde vale cero y “apenas” infinito. Estos puntos del plano se denominan **ceros** y **polos** del sistema.
- Un sistema queda completamente definido por la posición de los ceros y de los polos de su transformada Z. Los ceros y polos se representan mediante el **diagrama de ceros y polos**.

Secuencia escalón y secuencias hacia adelante

Secuencia escalón u[n]

Vale 0 en *n* negativos y 1 en *n* positivos

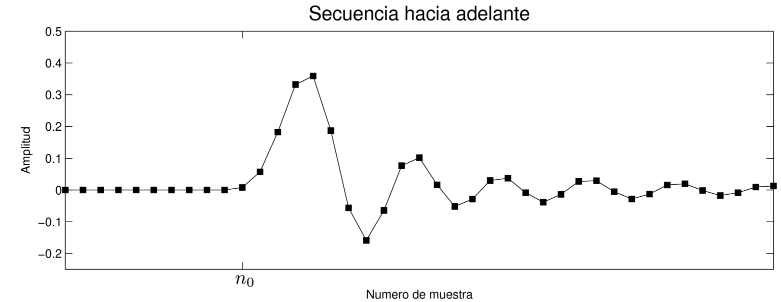




Secuencia hacia adelante

Vale 0 en $n < n0$

Se puede expresar como $u[n-n0]x[n]$



Ejemplo

Previamente se vio que la respuesta al impulso de la ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

es

$$h[n] = a^n u[n].$$

Se quiere calcular la Transformada Z de la señal

$$x[n] = a^n u[n]$$

Sustituyendo $x[n]$ en la ecuación de la transformada Z,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

La condición de convergencia es

$$|az^{-1}| < 1 \Longleftrightarrow |z| > |a|$$

Dentro de la región de convergencia

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Ejemplo

- La secuencia exponencial se transforma en una función racional (cociente de polinomios).
- El numerador tiene una raíz en cero. Las raices del numerador corresponden a los **ceros** de la secuencia o del sistema.
- El denominador tiene una raíz en *a*. Las raices del denominador corresponden a los **polos** de la secuencia o del sistema.
- La expresión de la transformada Z solo es válida en la región de convergencia.

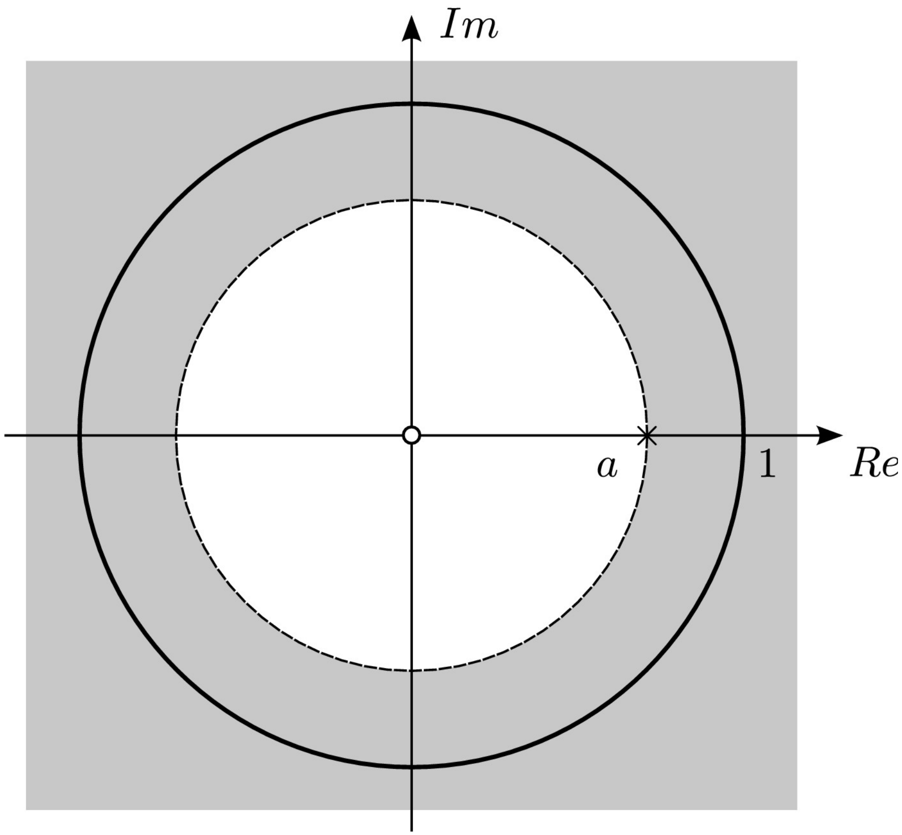


Diagrama de polos y ceros de la TZ de x[n]

Relación con la DTFT

DTFT:

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

Transformada Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Expresando z en notación polar

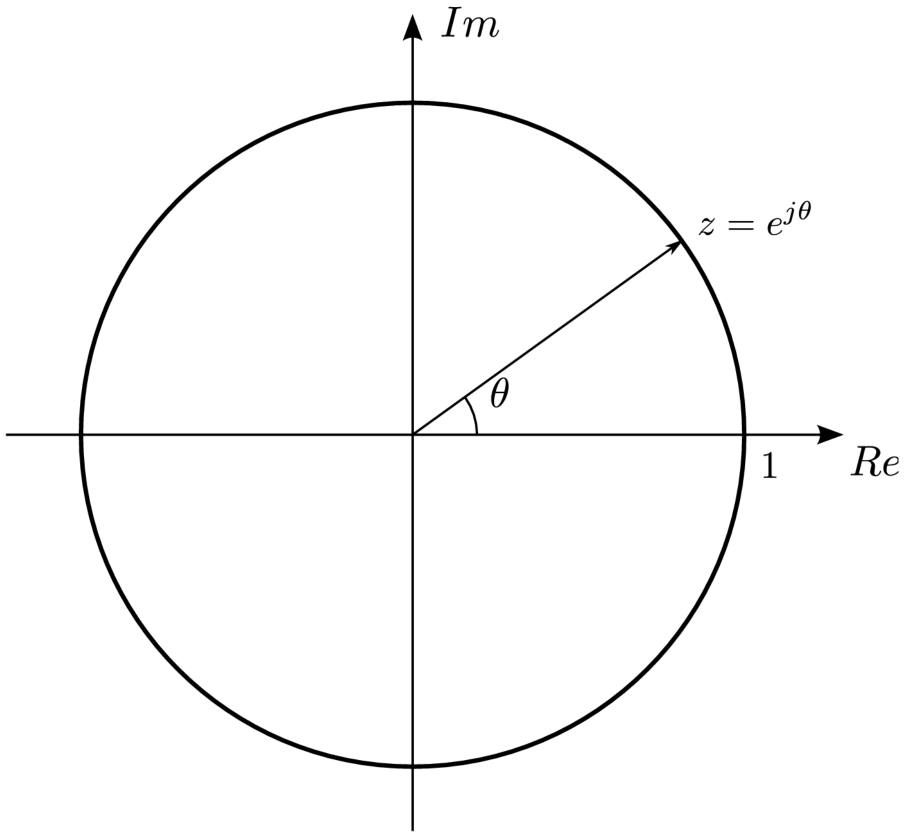
$$z = re^{j\theta}$$

Transformada Z en notación polar

$$X(re^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}$$

Relación con la DTFT

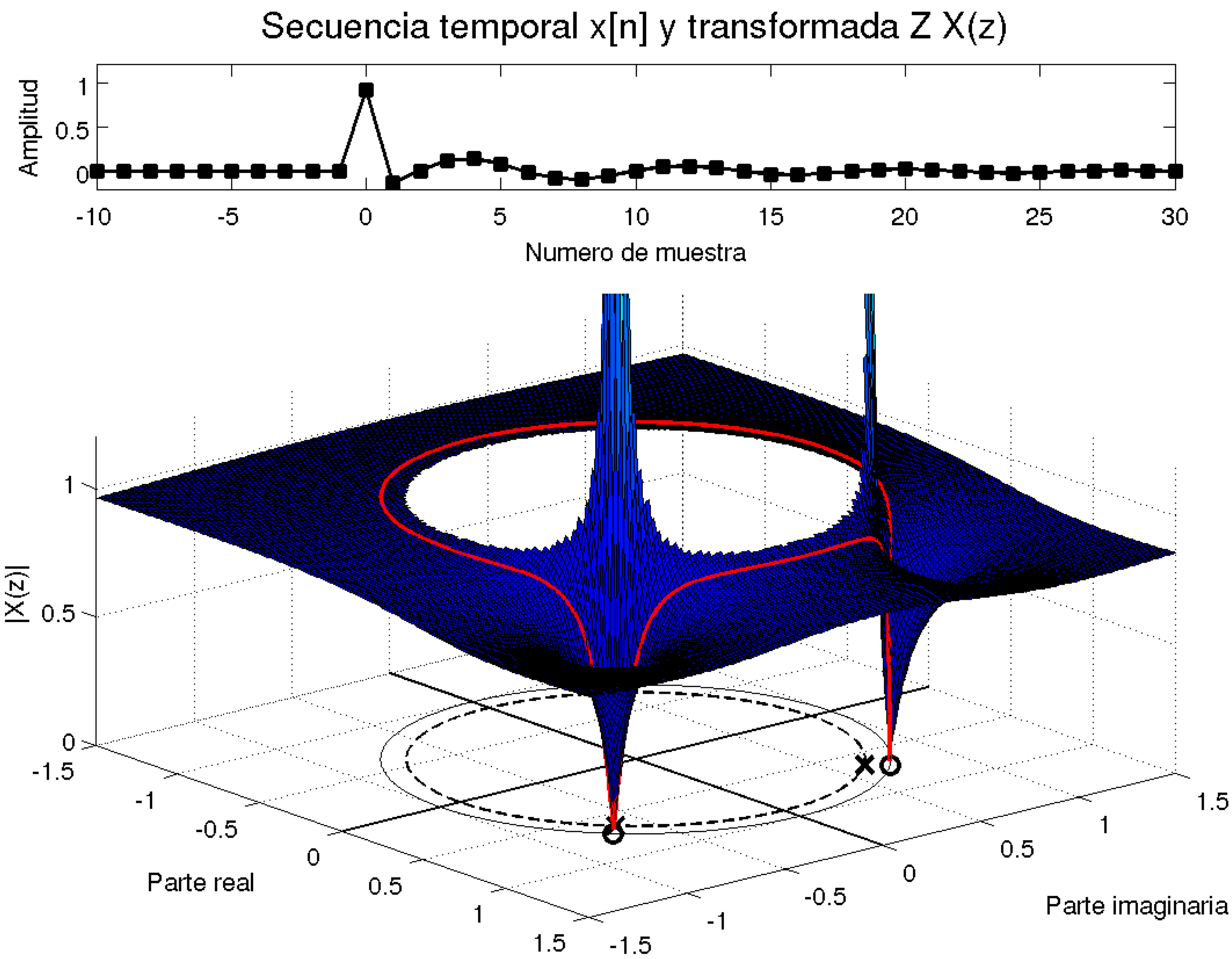
En la región del plano complejo donde $|z| = 1$ ($r = 1$), la transformada Z es idéntica a la DTFT. En otras palabras, la DTFT corresponde a la transformada Z evaluada en el circunferencia unidad.



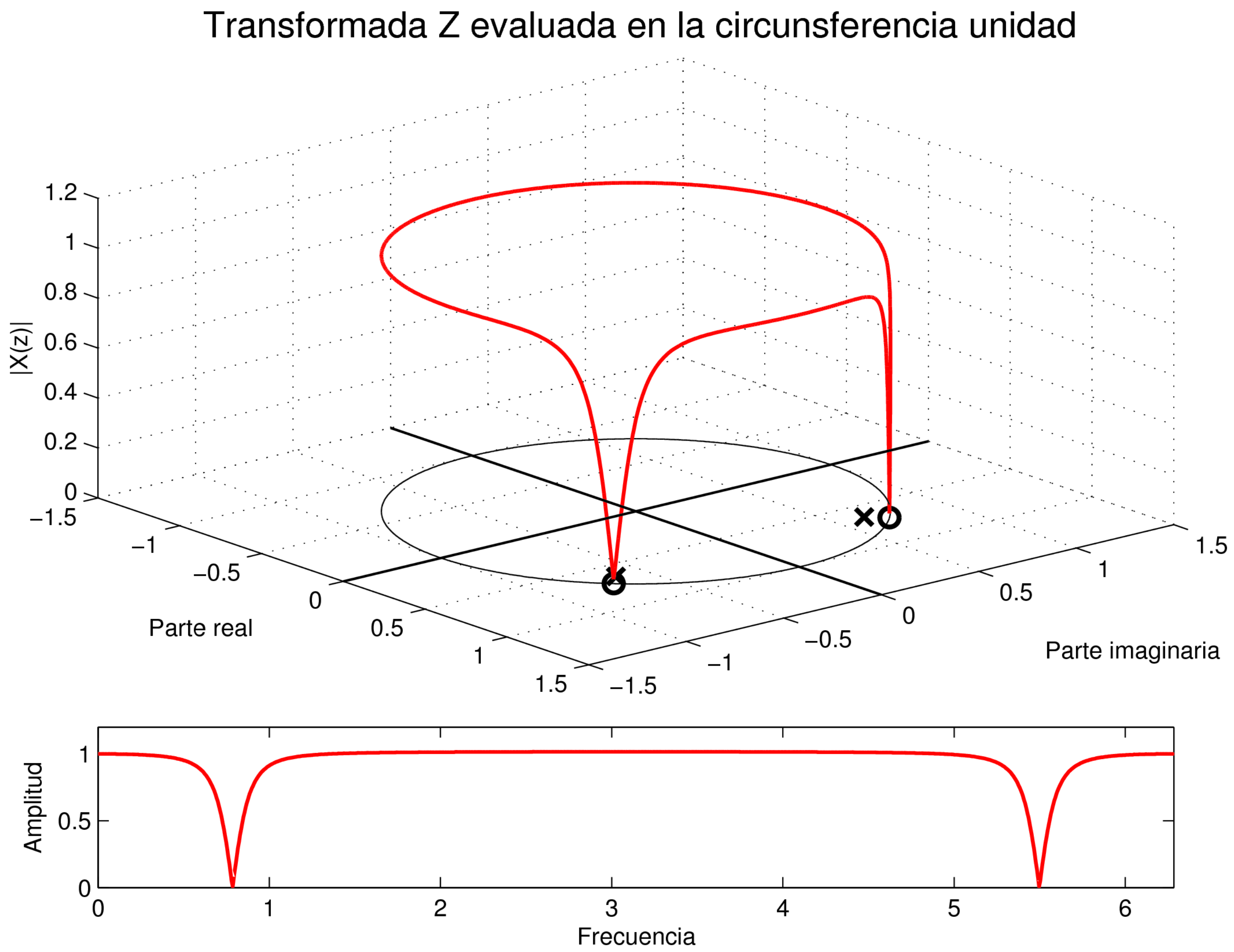
Observaciones

- El componente de frecuencia 0 (DC) se encuentra en el valor 1 del plano complejo.
- Las frecuencias positivas se encuentran en la semicircunferencia superior, crecientes en sentido antihorario.
- La geometría circular se corresponde con que el espectro de una señal discreta es periódico.

Relación con la DTFT



Relación con la DTFT



Propiedades de la Transformada Z

- Linealidad $$ax_1[n] + bx_2[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z)$$

- Desplazamiento temporal $$x[n - n_0] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$$

- Convolución $$x_1[n] * x_2[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z)$$

- Si la secuencia es real, el plano inferior es el complejo conjugado del plano superior. $$X(z^*) = X^*(z)$$

Función de Transferencia

Dada la respuesta al impulso *h[n]* de un sistema, se define la función de transferencia *H(z)* como la Transformada Z de *h[n]*.

Sean x[n] y y[n] la entrada y salida del sistema, y X(z) y Y(z) sus transformadas Z respectivas.

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

$$y[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z)$$

$$h[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H(z)$$

La salida del sistema es:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Como la transformada Z transforma la convolución en el producto, se cumple que:

$$Y(z) = X(z)H(z) \Longleftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

La función de transferencia del sistema es el cociente de las transformadas Z de la entrada y la salida.

Filtros recursivos - Ecuación en recurrencia

- La relación entre la entrada y la salida de un filtro recursivo está determinada por una **ecuación en recurrencia**:

$$\begin{aligned} y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_N y[n-N] \\ + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M] \end{aligned}$$

- La muestra actual de la salida se calcula como la muestra actual de la entrada y muestras anteriores de la entrada multiplicadas por los coeficientes *b* y muestras previas de la salida multiplicadas por los coeficientes *a*, todo sumado.
- Los coeficientes *a* y *b* se denominan **coeficientes de recursión**.

Función de transferencia de filtros recursivos

La transformada Z es particularmente útil para calcular la función de transferencia de filtros recursivos a partir de la ecuación en recurrencia.

Sea el filtro recursivo dado por la siguiente ecuación de diferencias

$$\begin{aligned} & y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_N y[n-N] \\ & \quad = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M y[n-M] \end{aligned}$$

Aplicando la Transformada Z a ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned} & Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \cdots - a_N z^{-N} Y(z) \\ & \quad = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) + \cdots + b_M z^{-M} X(z) \end{aligned}$$

Se sacan los factores comunes:

$$Y(z)(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \cdots - a_N z^{-N}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M})$$

Dividiendo $Y(z)$ entre $X(z)$ se obtiene la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \cdots - a_N z^{-N}}$$

Multiplicando por z^N el numerador y el denominador (o por z^M si $M > N$)

$$H(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \cdots + b_M z^{N-M}}{z^N - a_1 z^{N-1} - a_2 z^{N-2} - \cdots - a_N}$$

Función de transferencia de filtros recursivos

- Los sistemas recursivos tienen transformada Z que son funciones racionales, es decir, de la forma P(z)/Q(z), donde P(z) y Q(z) polinomios.
- Para funciones racionales es directo el cálculo de la respuesta al impulso a partir de la transformada Z del sistema mediante la transformada inversa.
- La respuesta en frecuencia se obtiene evaluando la función de transferencia en la circunferencia unidad.
- Si la transformada Z es racional, queda (casi) completamente especificada mediante el diagrama de polos y ceros.
- La región de convergencia es la región fuera del círculo determinado por el polo de mayor magnitud.

Estabilidad y convergencia de filtros recursivos

- La función de transferencia de un filtro recursivo es una función racional (cociente de polinomios).
- Esto implica que la respuesta al impulso de un filtro recursivo es una combinación lineal de sinusoides moduladas con exponenciales.
- Cada polo de la función de transferencia origina un término de la combinación lineal de la respuesta al impulso.
- El decaimiento (o crecimiento) del término es exponencial y la base de la exponencial es el módulo del polo asociado.
- Los términos de la combinación lineal asociados a polos con magnitud mayor que uno tienen crecimiento exponencial con n. La respuesta al impulso diverge y el filtro es inestable.

Para que el sistema sea estable, todos los polos deben estar contenidos dentro del círculo unidad.

Estabilidad y convergencia de filtros recursivos

Región de convergencia

La región de convergencia de la transformada Z consiste en el conjunto de puntos del plano complejo en donde la transformada Z existe (converge).

Condición de convergencia:

$$|H(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}\right| < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty$$

Definiendo la función de prueba como

$$p[n] = z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(\theta n) - j\sin(\theta n)\right]$$

La condición de convergencia es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]p[n]| < \infty$$

- El producto *h[n]p[n]* tiene que ser decreciente.
- *p[n]* tiene que decrecer mas rápido que *h[n]* (si h[n] es creciente) o crecer mas lento que h[n] (si h[n] decrece).

Estabilidad y convergencia de filtros recursivos

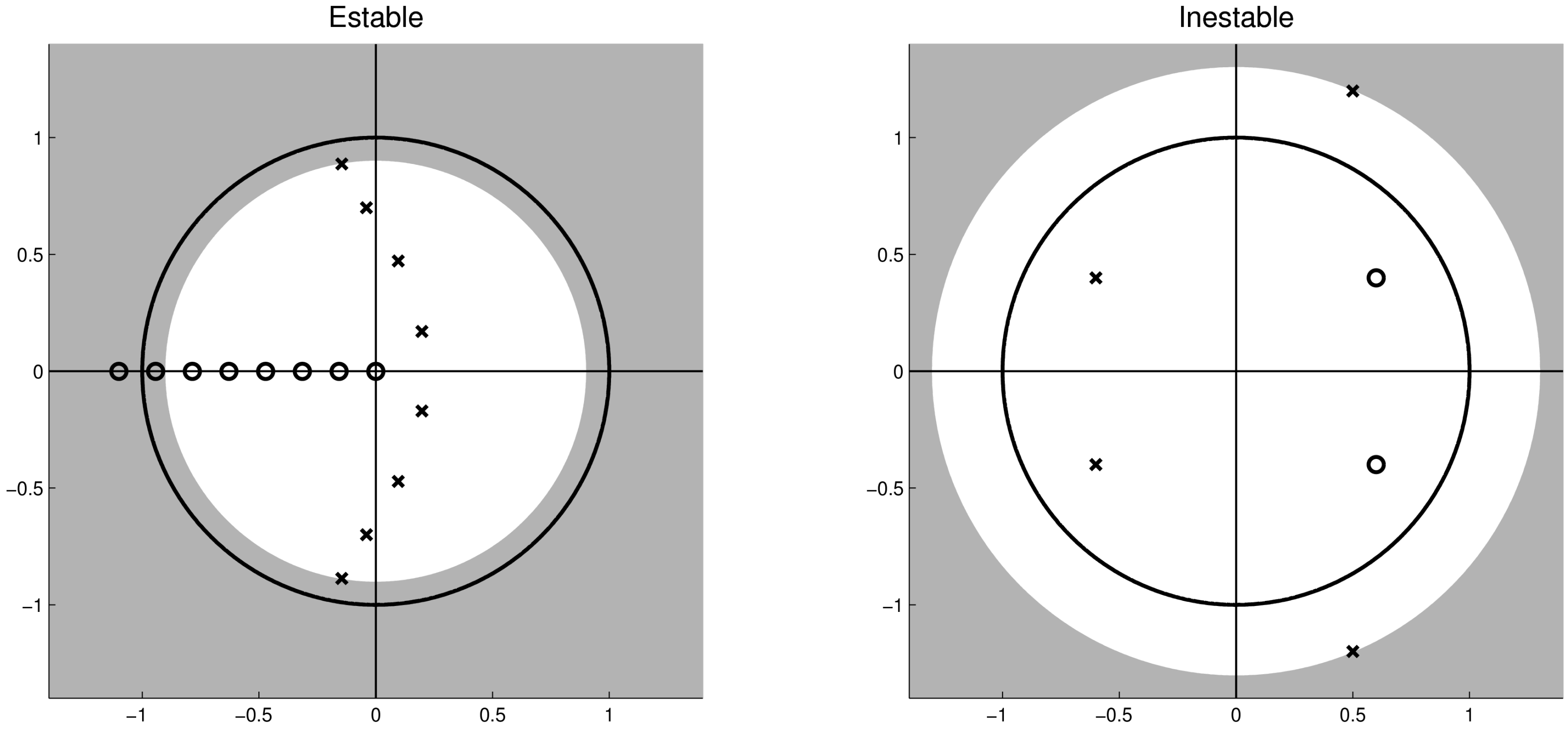
Región de convergencia

- Para que el producto *h[n]p[n]* converja,
  - p[n] tiene que compensar el crecimiento del término de crecimiento mas rápido de *h[n]* (si *h[n*] es creciente).
  - *p[n]* puede crecer a lo sumo tan rápido como para compensar el término de decrecimiento mas lento de *h[n]* (si *h[n]* decrece).
- El decrecimiento mas lento o el crecimiento mas rápido de *h[n]* es causado por el polo de mayor magnitud de la función de transferencia.
- Las funciones de prueba que compensan a *h[n]* son las correspondientes a los números complejos de módulo mayor que el módulo del polo de mayor magnitud.

Estabilidad y convergencia de filtros recursivos

Región de convergencia

La región de convergencia es la región complementaria al círculo determinado por el polo de mayor módulo, |*z*|>*max(rk)*.



Para que el sistema sea estable, la región de convergencia debe contener a la cirunsferencia unidad.

Estabilidad y convergencia de filtros recursivos

Ejemplo

- Se considera el filtro dado por la siguiente ecuación en recurrencia

$$y[n]-(a+b)y[n-1]+aby[n-2]=2x[n]-(a+b)x[n-1].$$

- La función de transferencia es

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{2z^2-(a+b)z}{z^2-z(a+b)+ab}.$$

- Cálculo de ceros y polos
  - Polos: $z^2-z(a+b)+ab=0 \Longleftrightarrow z=a,\ z=b$
  - Ceros: $2z^2-(a+b)z=0 \Longleftrightarrow z=0,\ z=\frac{a+b}{2}$

- Descomposición en fracciones simples de la función de transferencia

$$H(z)=\frac{z\,(2z-(a+b))}{(z-a)(z-b)}=\frac{Az}{z-a}+\frac{Bz}{z-b}$$

Igualando los coeficientes del numerador, se llega a que $A=B=1$,

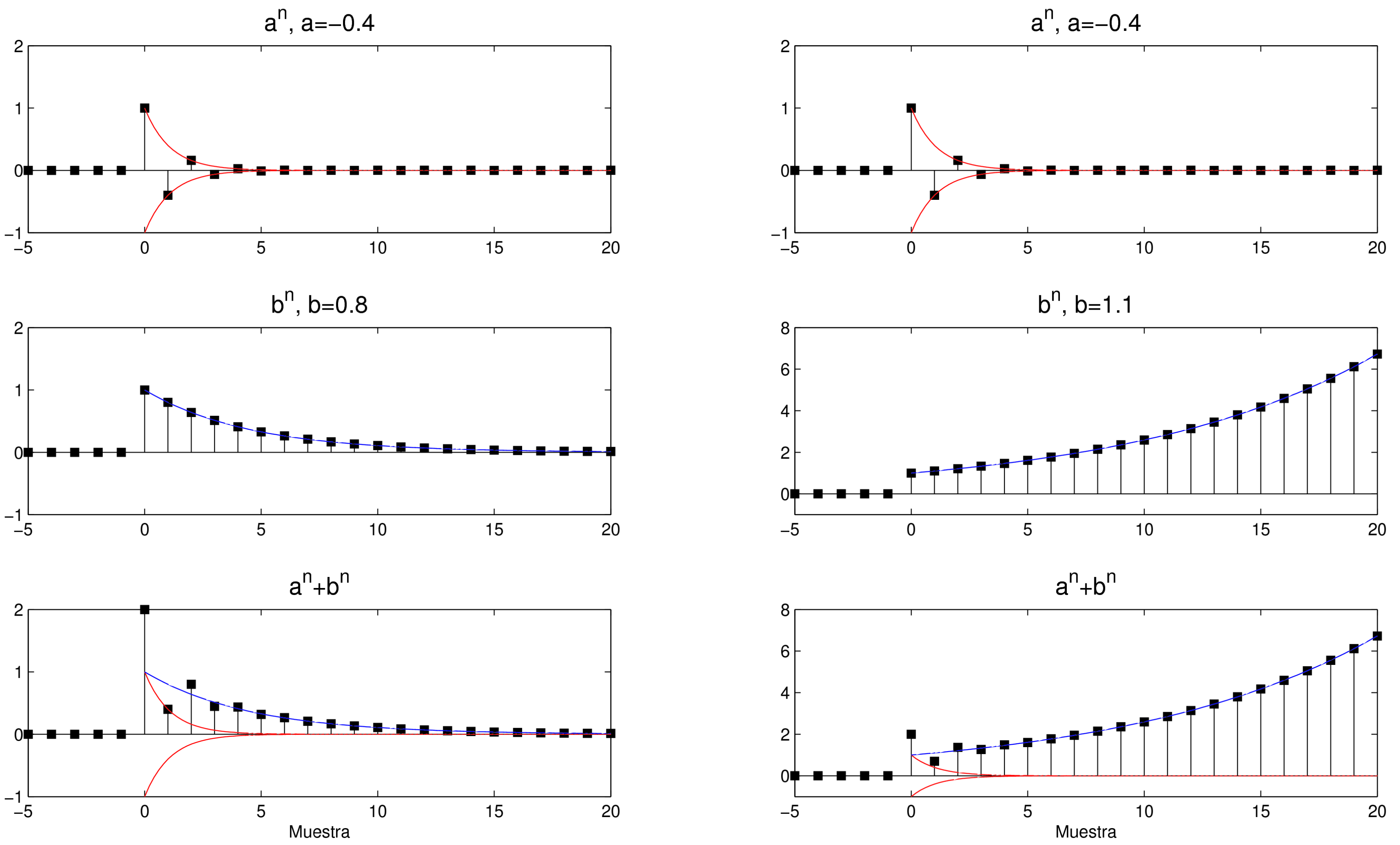
$$H(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}.$$

- Respuesta al impulso.

$$h[n]=(a^n+b^n)\,u[n].$$

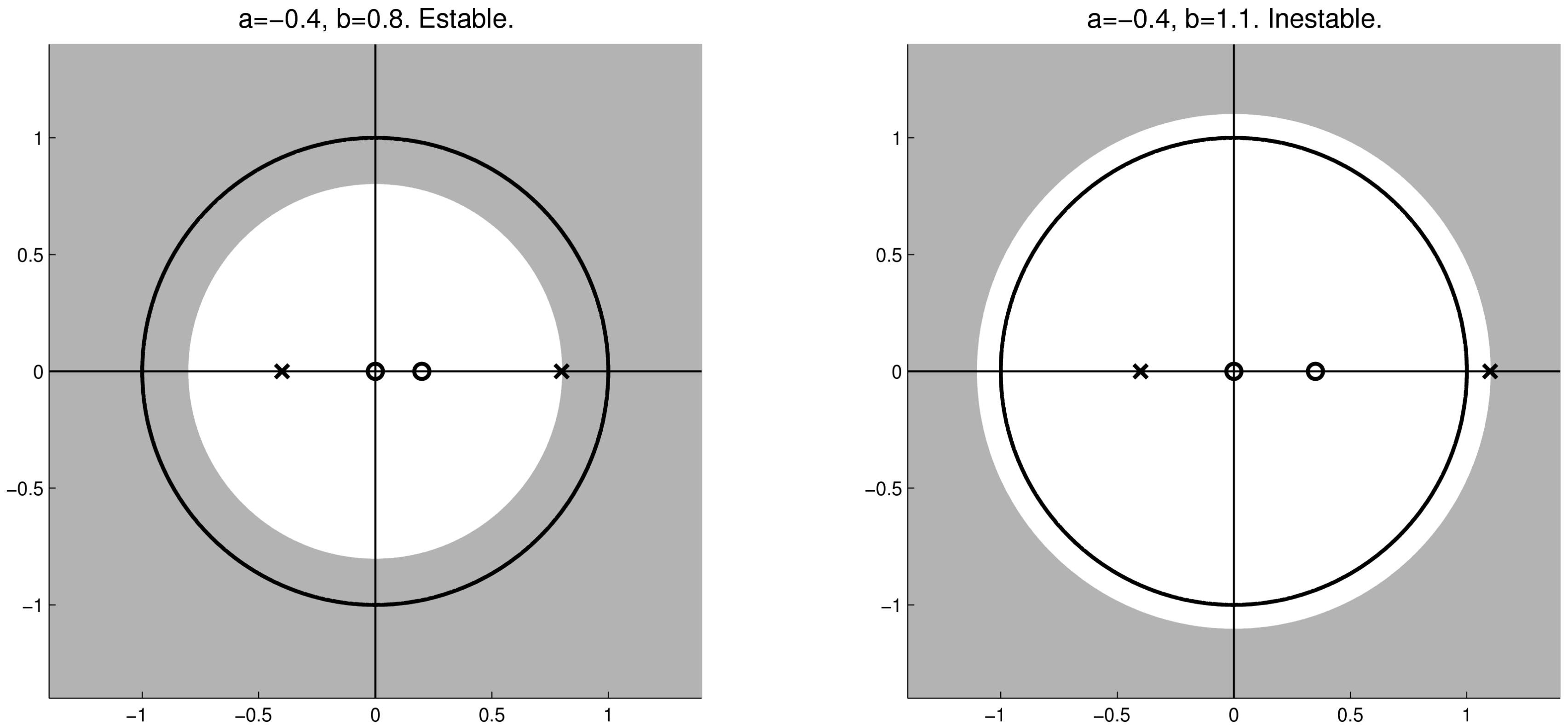
Estabilidad y convergencia de filtros recursivos

Ejemplo



Estabilidad y convergencia de filtros recursivos

Ejemplo



Filtros en serie y en paralelo

Para obtener la función de transferencia del filtro equivalente a filtros en serie o en paralelo, se cumplen las mismas reglas que cumple la respuesta en frecuencia.

Filtros en serie

La función de transferencia del filtro equivalente es la multiplicación de la función de transferencia de los filtros de la serie.

Filtros en paralelo

La función de transferencia del filtro equivalente es la suma de la función de transferencia de los filtros del paralelo.

Cuando se tienen filtros recursivos combinados en serie o en paralelo, los coeficientes del filtro resultante se obtienen facilmente yendo al dominio z y aplicando las operaciones algebraicas correspondientes, que serán sumas o multiplicaciones.

Filtros en serie y en paralelo

Dados dos filtros especificados por las siguientes ecuaciones en recurrencia,

- Filtro 1: $y[n] = x[n] + b_1 x[n-1]$
- Filtro 2: $y[n] = -A_1 y[n-1] + x[n]$

Se quiere encontrar las ecuaciones en recurrencia de la cascada y la serie de ambos filtros.

Para eso, primero hay que calcular la función de transferencia de los filtros:

$$H_1(z) = 1 + b_1 z^{-1} = \frac{z + b_1}{z}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + A_1 z^{-1}} = \frac{z}{z + A_1}$$

1. Filtro en cascada

$$H_{serie}(z) = H_1(z) H_2(z) = \frac{z + b_1}{z + A_1}$$

La ecuación en recurrencia es

$$y[n] + A_1 y[n-1] = x[n] + b_1 x[n-1]$$

2. Filtro en paralelo

$$H_{paralelo}(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{2z^2 + (A_1 + b_1)z + A_1 b_1}{z^2 + A_1 z}$$

La ecuación en recurrencia es

$$y[n] + A_1 y[n-1] = 2x[n] + (A_1 + b_1)x[n-1] + A_1 b_1 x[n-2]$$

Filtros recursivos

Introducción

- Los filtros recursivos están determinados por una **ecuación en diferencias** que se debe cumplir permanentemente que involucra la entrada *x[n]* y la salida *y[n]*.
- Permite realizar un filtrado con un filtro de respuesta al impulso larga (o infinita) sin calcular explicitamente la convolución.
- Los filtros recursivos son mas rápidos que los filtros implementados mediante convolución.
- Suelen ser menos flexibles (mas difíciles de especificar) y de menor desempeño (en cuanto a la respuesta en frecuencia) que los filtros por convolución.

Efecto de un polo y un cero

Se considera un filtro recursivo cuya función de transferencia tiene un cero y un polo en *a* y *b* respectivamente.

$$H(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

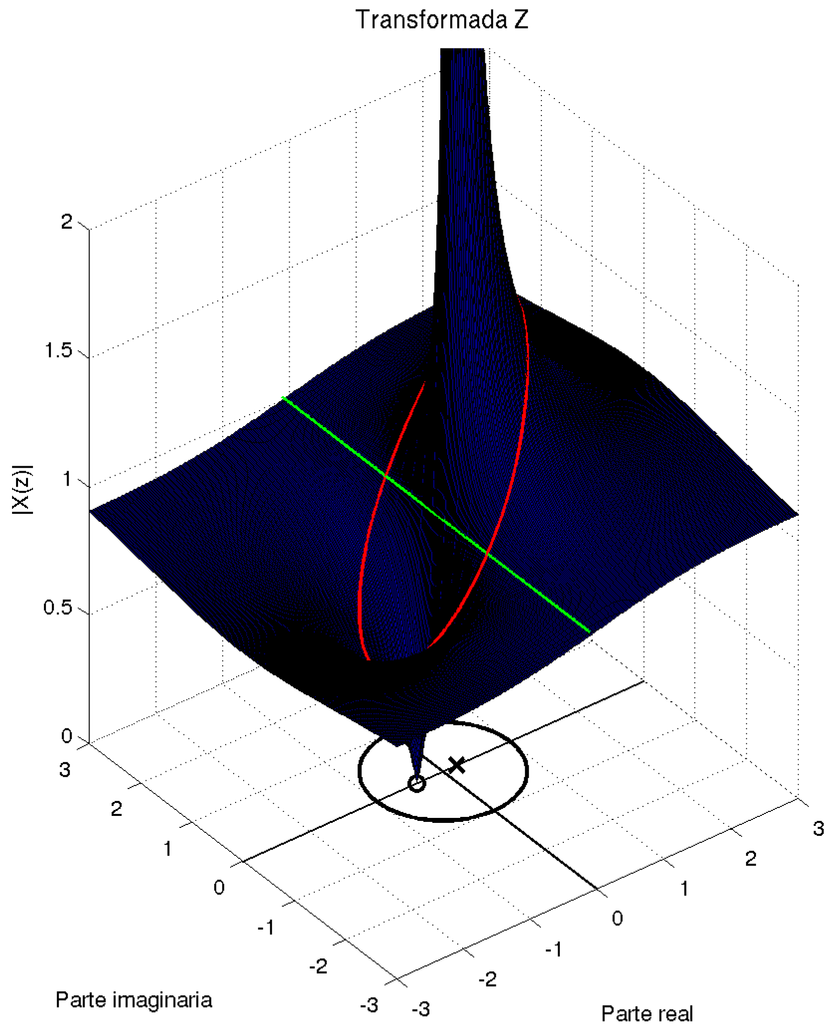
El módulo de la transformada Z en cierto punto del plano z0 es

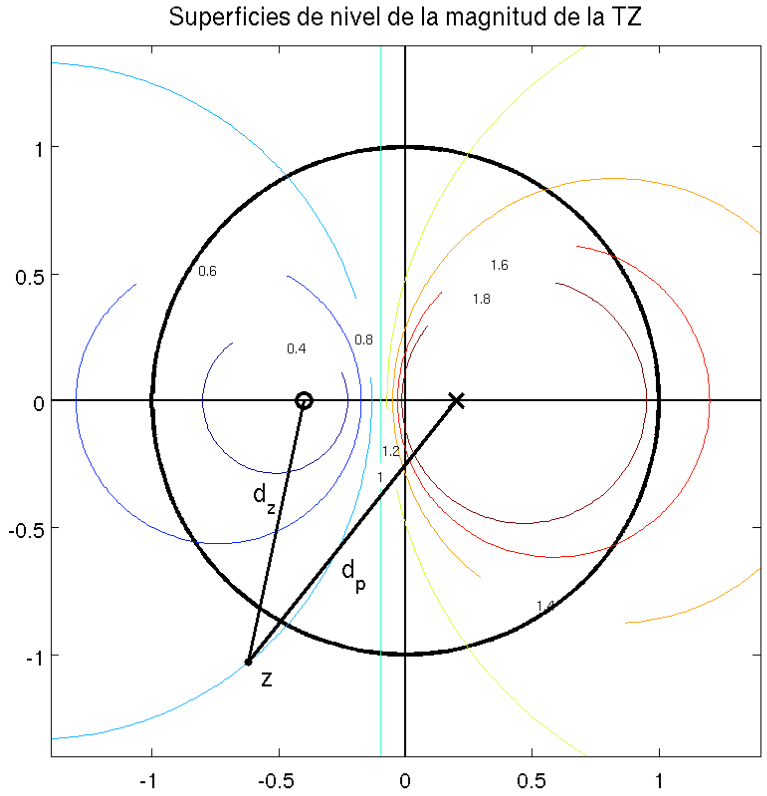
$$|H(z_0)| = \frac{|z_0 - a|}{|z_0 - b|} = \frac{\mathrm{dist}(z_0, a)}{\mathrm{dist}(z_0, b)}$$

El módulo de la transformada Z en cierto punto del plano z0 es el cociente entre la distancia entre el punto z0 y el cero, y la distancia entre el punto z0 y el polo.

Esto permite a grande rasgos deducir la forma de la transformada Z y en particular, el valor en la circunsferencia unidad.

Efecto de un polo y un cero





Efecto de un polo y un cero

Observaciones

- La TZ en los puntos del plano mas cercanos al cero que al polo van a tener menor magnitud que 1. La magnitud es mas pequeña a medida que el punto está mas cercano al cero.
- La TZ en los puntos del plano mas cercanos al polo que al cero van a tener mayor magnitud que 1. La magnitud es mayor a medida que el punto está mas cercano al polo.
- El efecto de el polo y el cero se cancela en distancias grandes.

Filtro IIR de primer orden - Pasabajos

1. La ecuación en recurrencia de un filtro de primer orden es:

$$y[n] - a_1 y[n-1] = b_0 x[n]$$

2. La función de transferencia del sistema es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z}{z - a_1}$$

3. $H(z)$ tiene un polo en $z = a_1$ y un cero en $z = 0$

4. Restricción de ganancia 1 en contínua ($\theta = 0$):

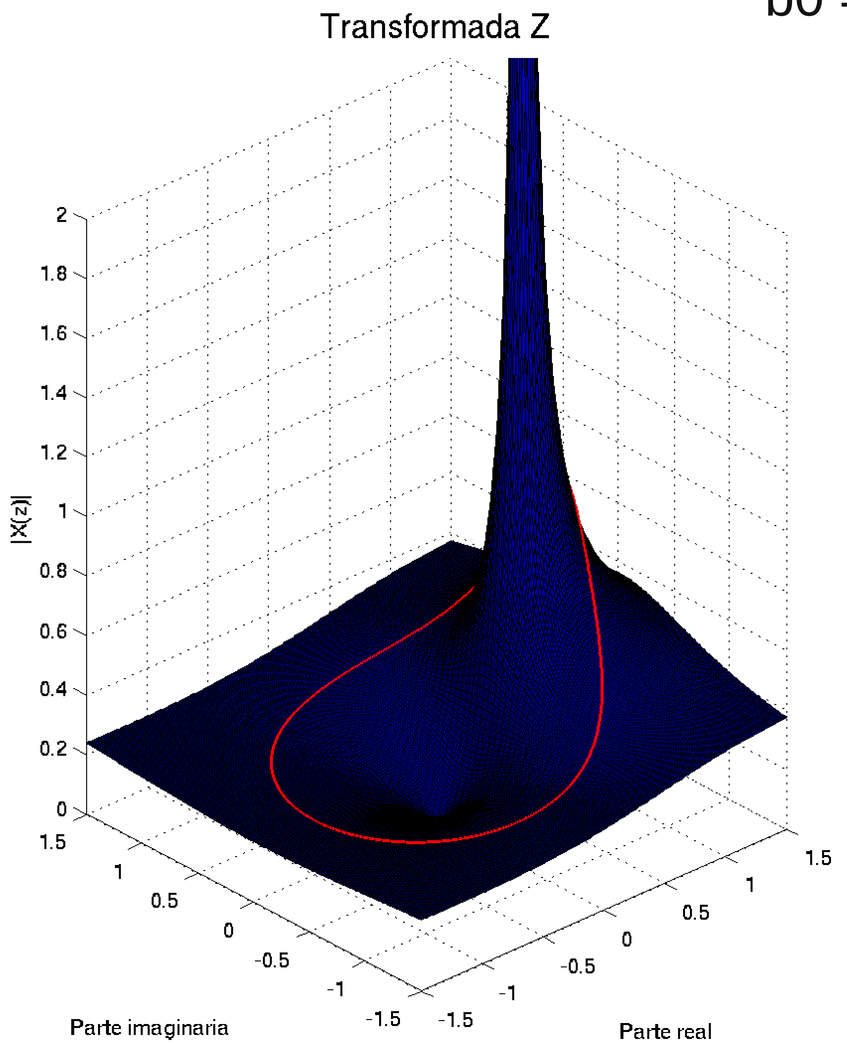
   Evaluando $H(z)$ en $z = e^{j0} = 1$, se concluye que se tiene que cumplir

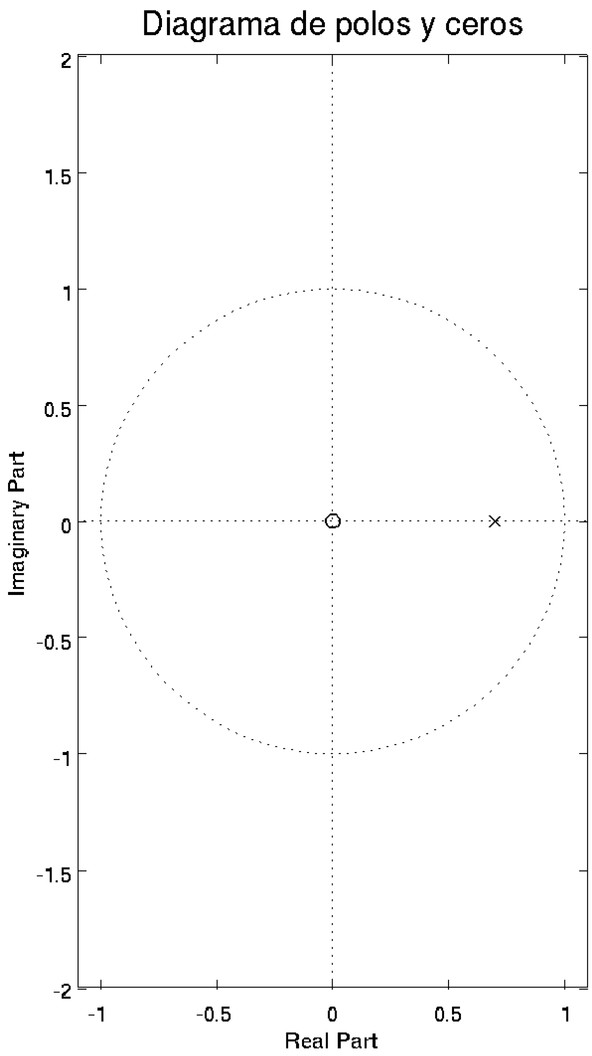
$$\frac{b_0}{1 - a_1} = 1 \Longrightarrow b_0 + a_1 = 1$$

Filtro IIR de primer orden - Pasabajos

a1= 0.7

b0 = 0.3





Filtro IIR de primer orden - Pasabajos

La respuesta en frecuencia se obtiene evaluando $H(z)$ en $z = e^{j\theta}$

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\theta}} = \frac{b_0}{1 - a_1 e^{-j\theta}} = \frac{b_0}{1 - a_1 \cos\theta + j a_1 \sin\theta}$$

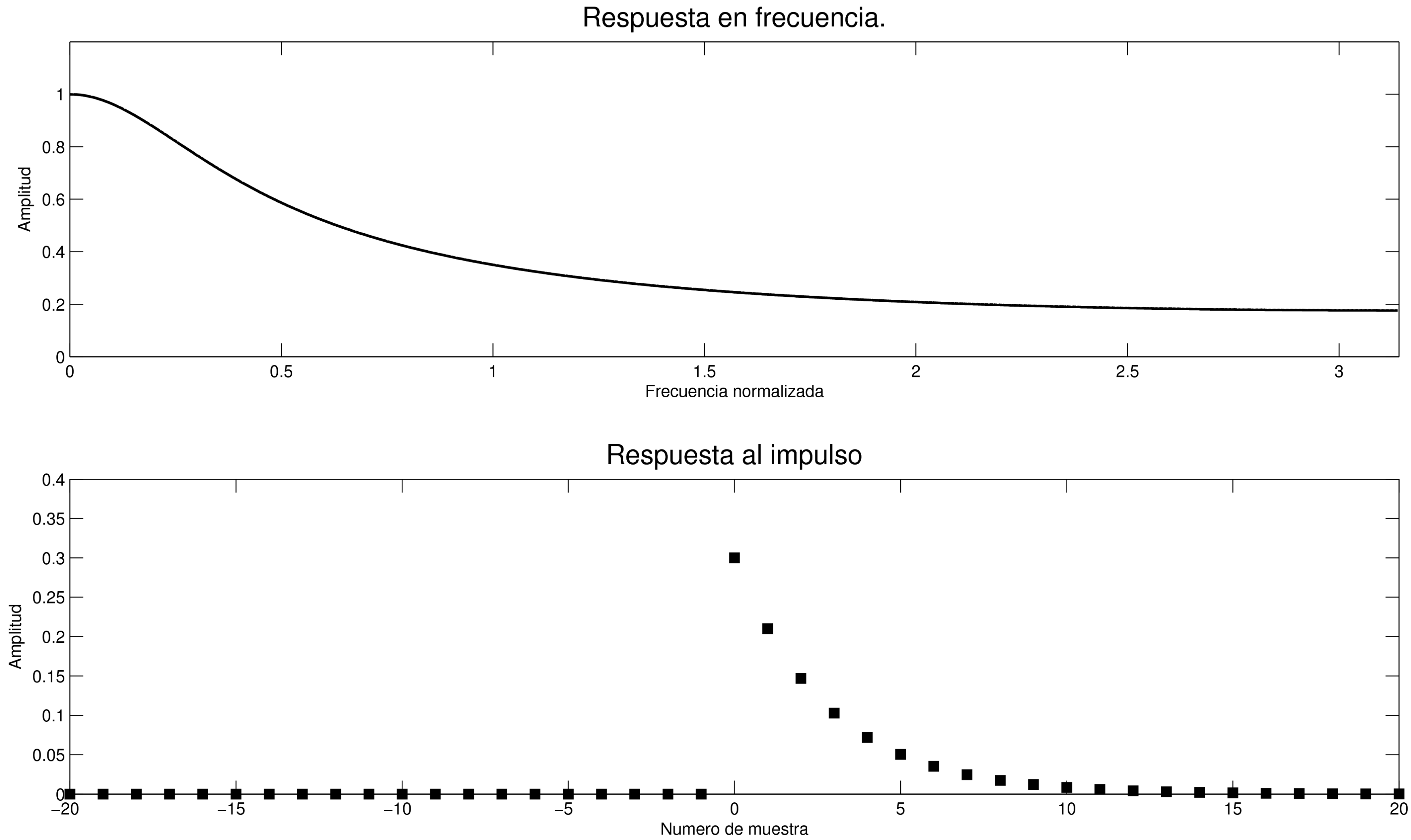
El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia es:

$$|H(z)|^2 = \frac{b_0^2}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos\theta}$$

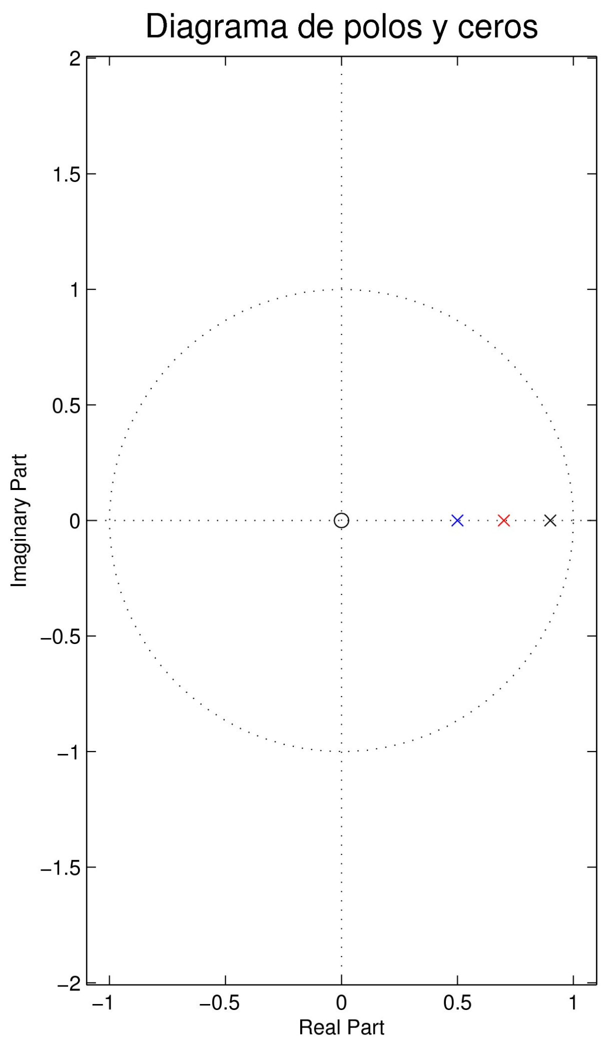
La respuesta al impulso se obtiene con la transformada Z inversa

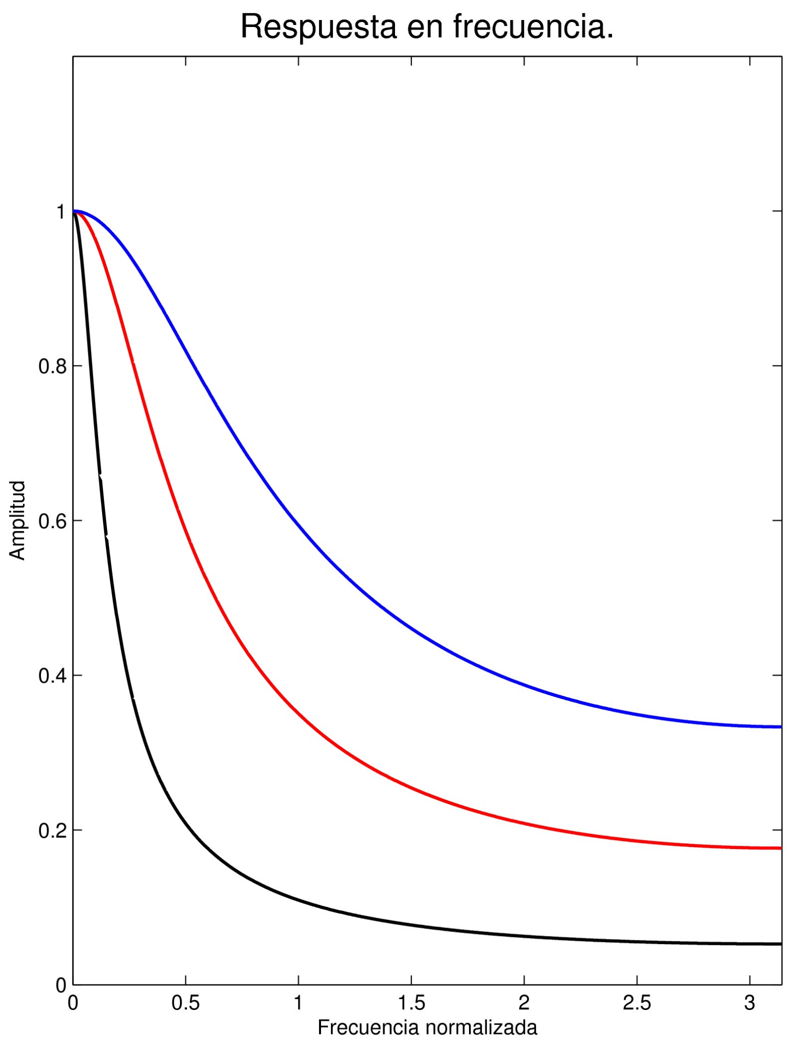
$$h[n] = b_0 a_1^n u[n]$$

Filtro IIR de primer orden - Pasabajos



Filtro IIR de primer orden - Pasabajos





Filtros IIR de primer orden en serie

Poca habilidad de filtros iir de orden 1 para separar bandas de frecuencia. El desempeño puede ser mejorado combinando varios filtros en serie.

La transformada Z de filtros en serie es el producto de la transformada Z de cada filtro. A partir de la transformada Z, se obtienen los coeficientes del nuevo filtro.

Ejemplo de 4 pasabajos IIR en cascada

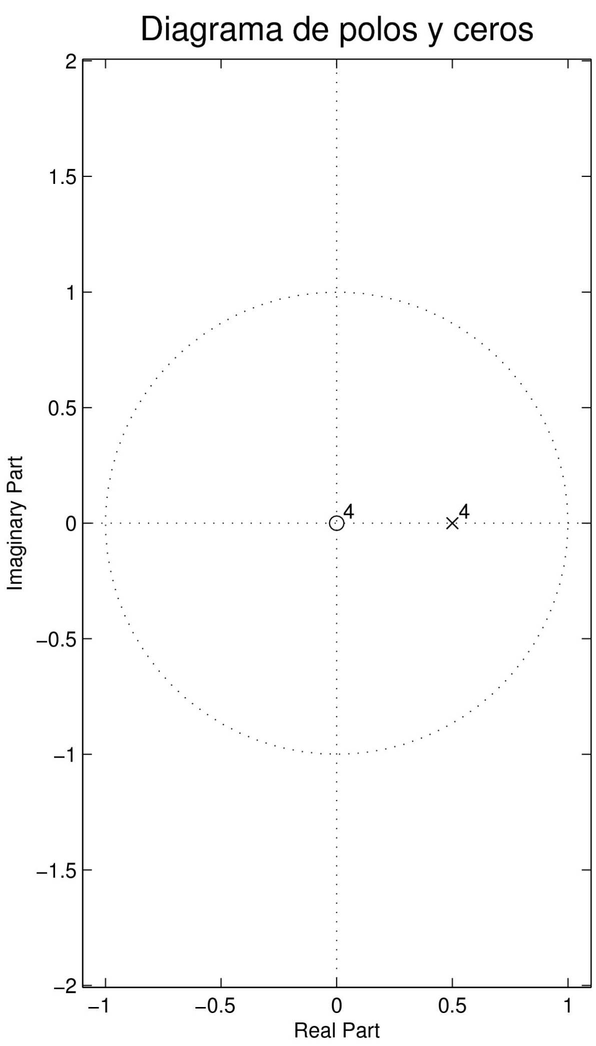
Trasformada Z

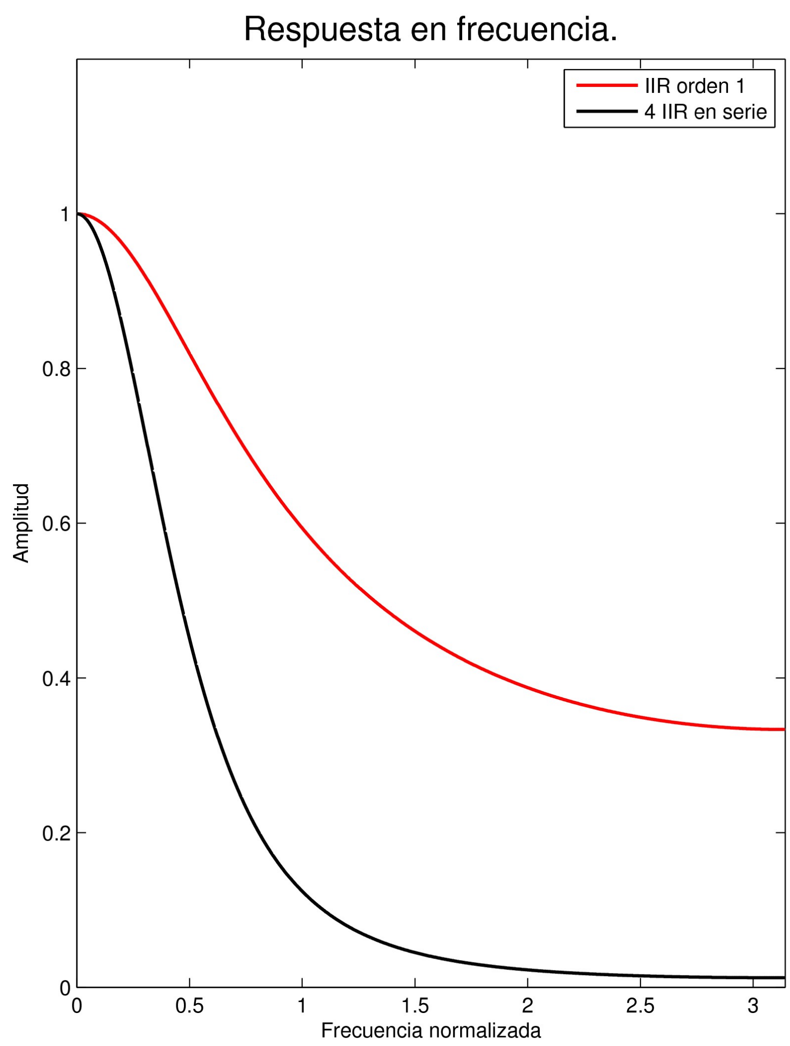
$$H_{serie}(z) = H^4(z) = \left(\frac{b_0 z}{z - a_1}\right)^4 = \frac{b_0^4 z^4}{z^4 - 4a_1 z^3 + 6a_1^2 z^2 - 4a_1^3 z + a_1^4}$$

Ecuación en recurrencia

$$y[n] - 4a_1 y[n-1] + 6a_1^2 y[n-2] - 4a_1^3 y[n-3] + a_1^4 y[n-4] = b_0^4 x[n]$$

Filtros IIR de primer orden en serie





Filtro IIR de primer orden - Pasaaltos

1. La ecuación en recurrencia de un filtro de primer orden es:

$$y[n] - a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

2. La función de transferencia del sistema es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z + b_1}{z - a_1}$$

3. $H(z)$ tiene un polo en $z = a_1$ y un cero en $z = -\frac{b_1}{b_0}$

4. Restricción de ganancia 0 en continua ($\theta = 0$) y ganancia 1 en frecuencia de Nyquist ($\theta = \pi$):

   Evaluando $H(z)$ en $z = e^{j0} = 1$, se impone la condición que

$$b_0 + b_1 = 0 \Longrightarrow b_0 = -b_1$$

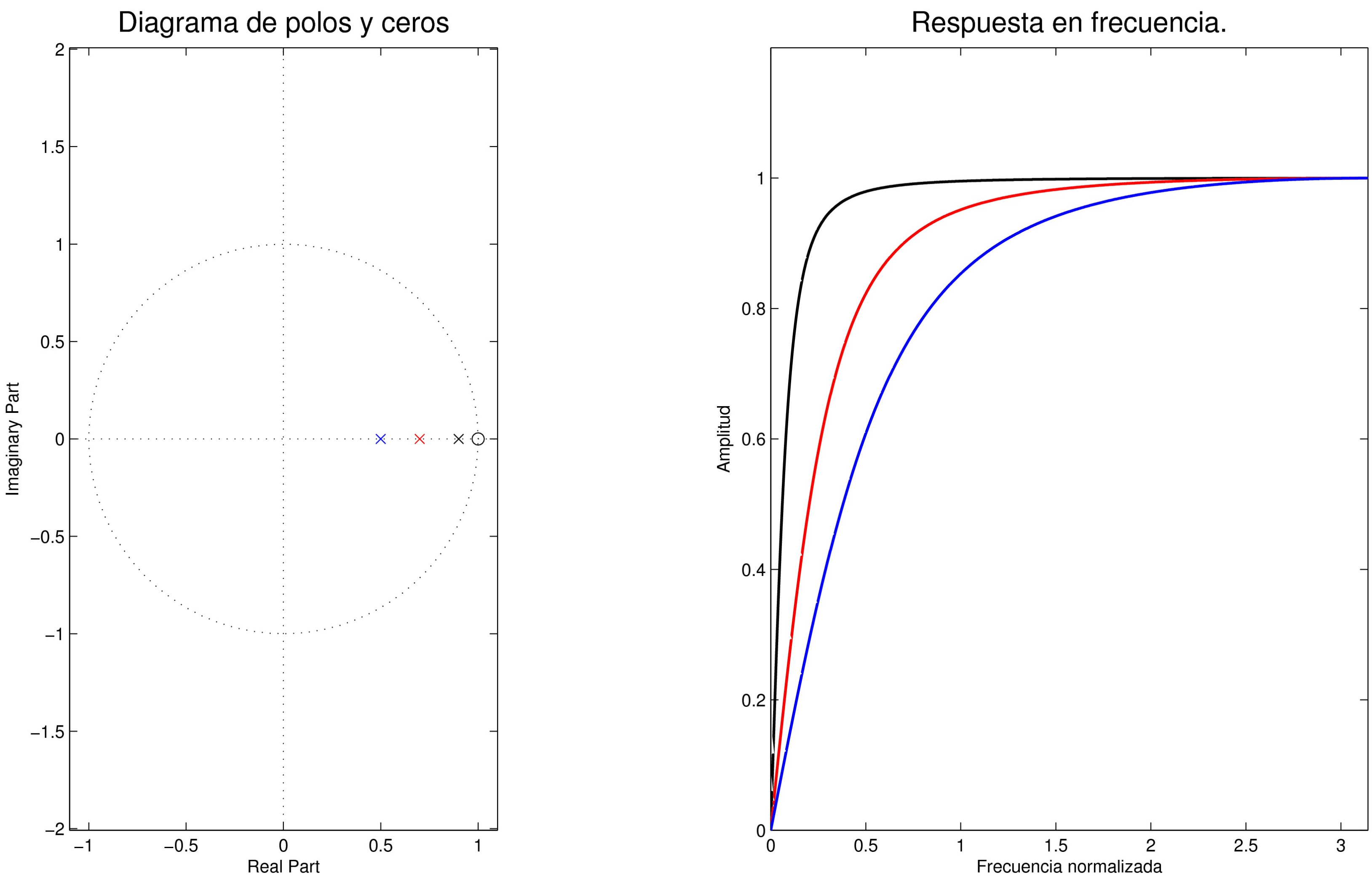
   Evaluando $H(z)$ en $z = e^{j\pi} = -1$, se impone la condición que

$$\frac{-b_0 + b_1}{-1 - a_1} = 1$$

   Por lo tanto, combinando las dos ecuaciones anteriores,

$$b_0 = \frac{1 + a_1}{2}$$
$$b_1 = -\frac{1 + a_1}{2}$$

Filtro IIR de primer orden - Pasaaltos



Filtros IIR de segundo orden

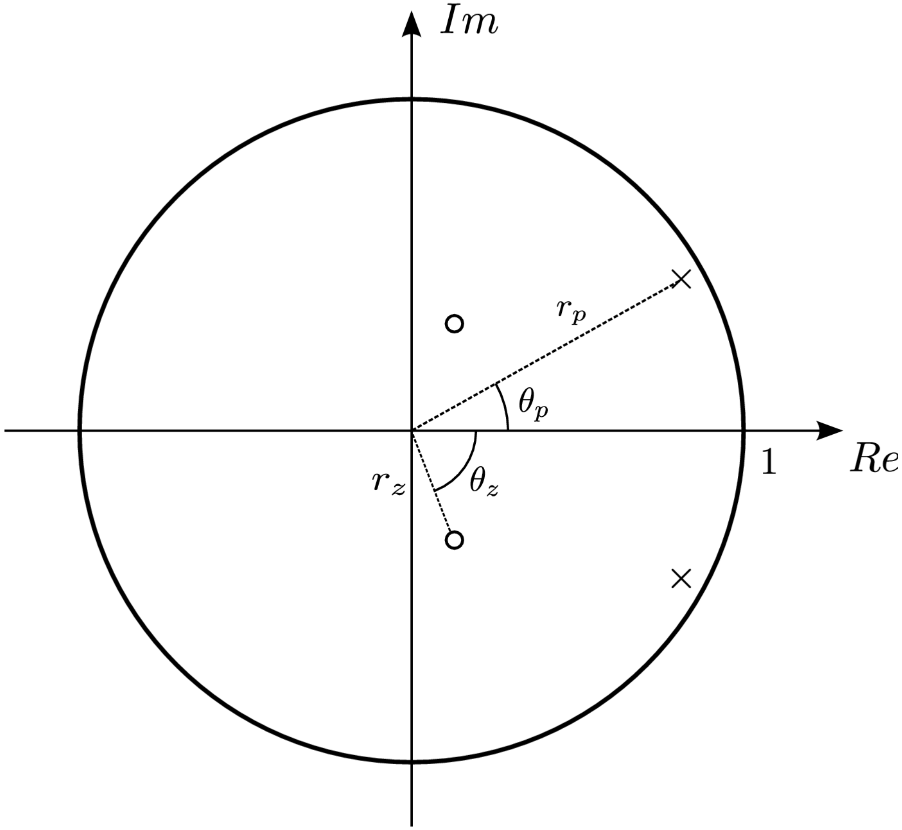
Los filtros de segundo orden tienen dos polos y dos ceros. El par de ceros y de polos deben ser complejos conjugados para que la respuesta al impulso sea real

Función de transferencia

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\left(z - r_z e^{j\theta_z}\right)\left(z - r_z e^{-j\theta_z}\right)}{\left(z - r_p e^{j\theta_p}\right)\left(z - r_p e^{-j\theta_p}\right)} \\ &= \frac{z^2 - 2r_z z \cos\theta_z + r_z^2}{z^2 - 2r_p z \cos\theta_p + r_p^2} \end{aligned}$$

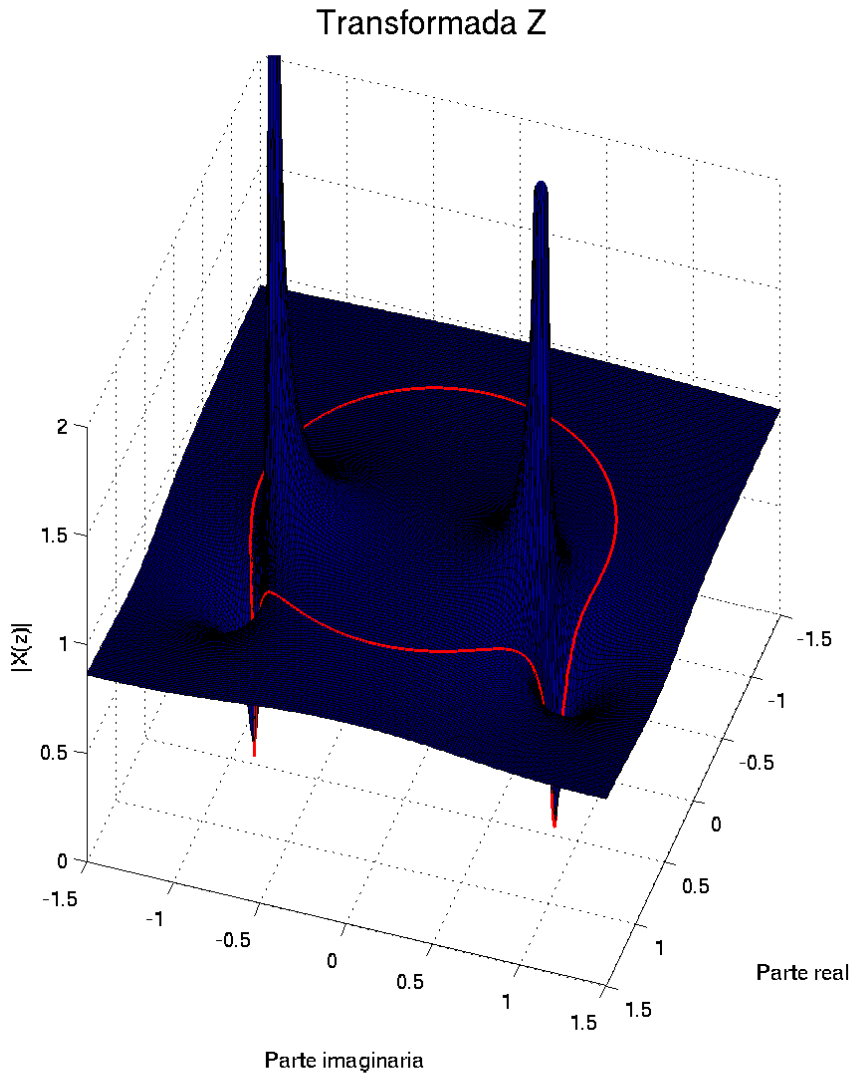
Ecuación en recurrencia

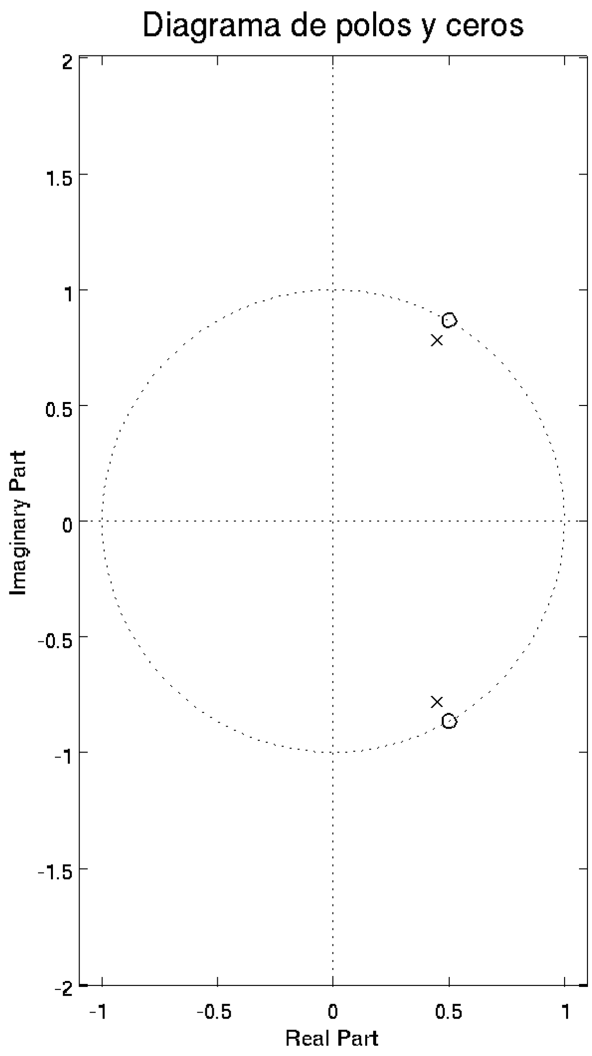
$$\begin{aligned} y[n] - 2r_z \cos\theta_z y[n-1] + r_z^2 y[n-2] \\ = x[n] - 2r_p \cos\theta_p x[n-1] + r_p^2 x[n-2] \end{aligned}$$



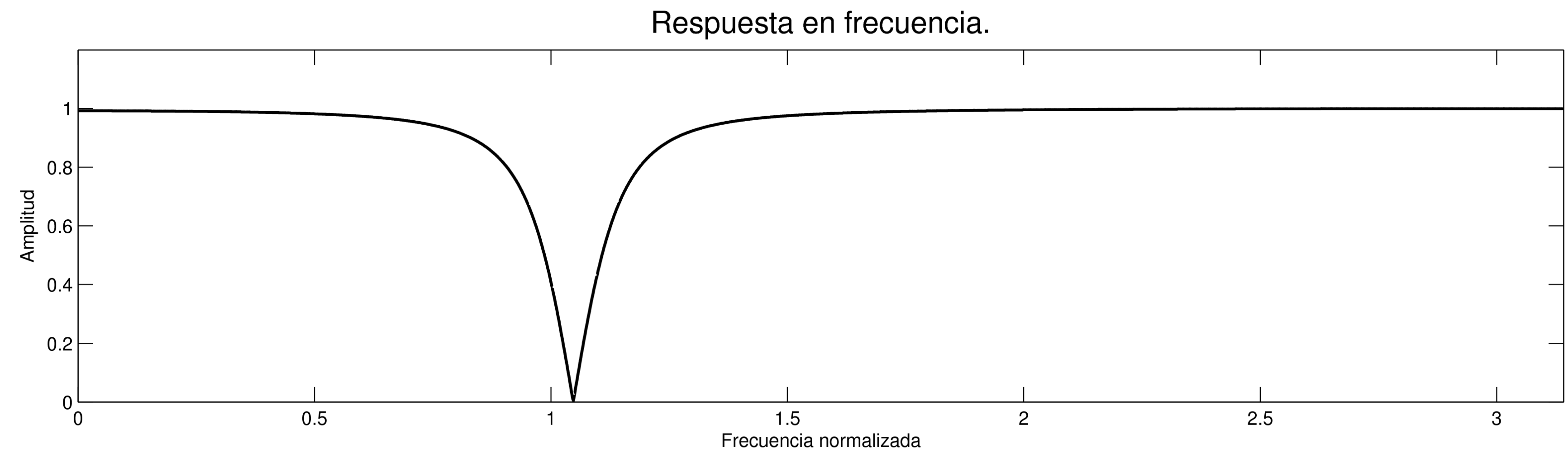
Filtros IIR de segundo orden – Filtros “notch”

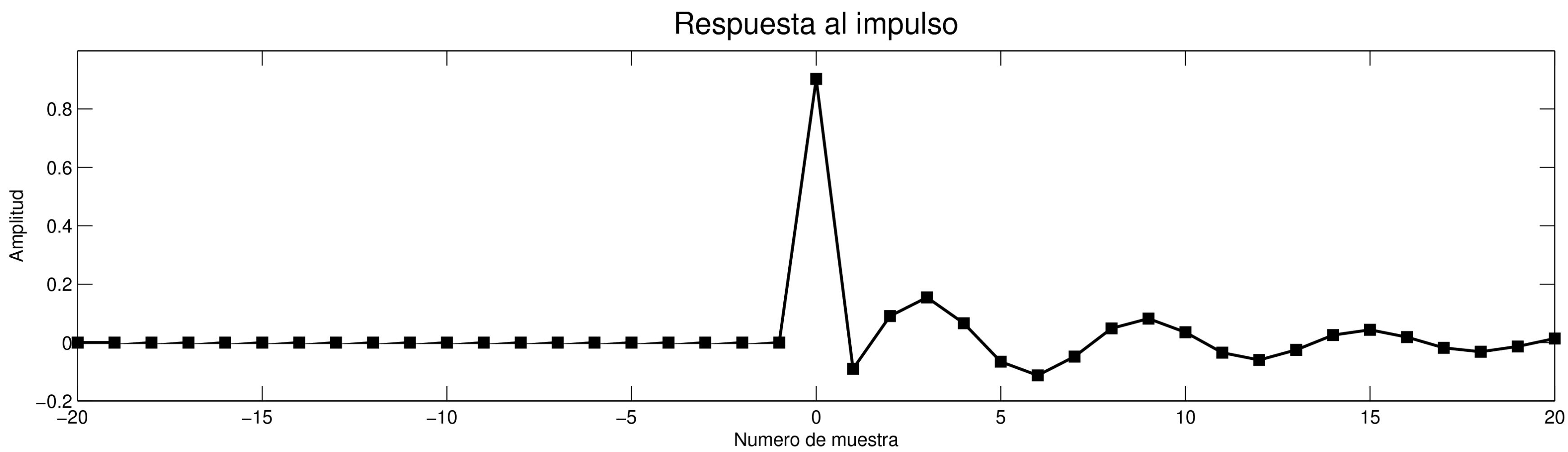
$$r_z = 1, \quad \theta_z = \theta_p$$



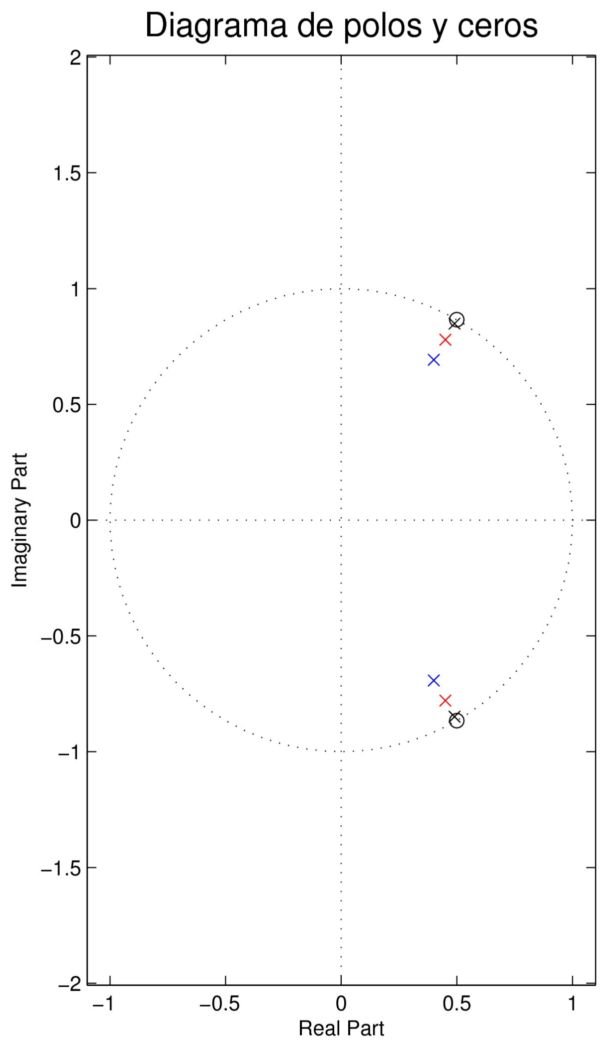


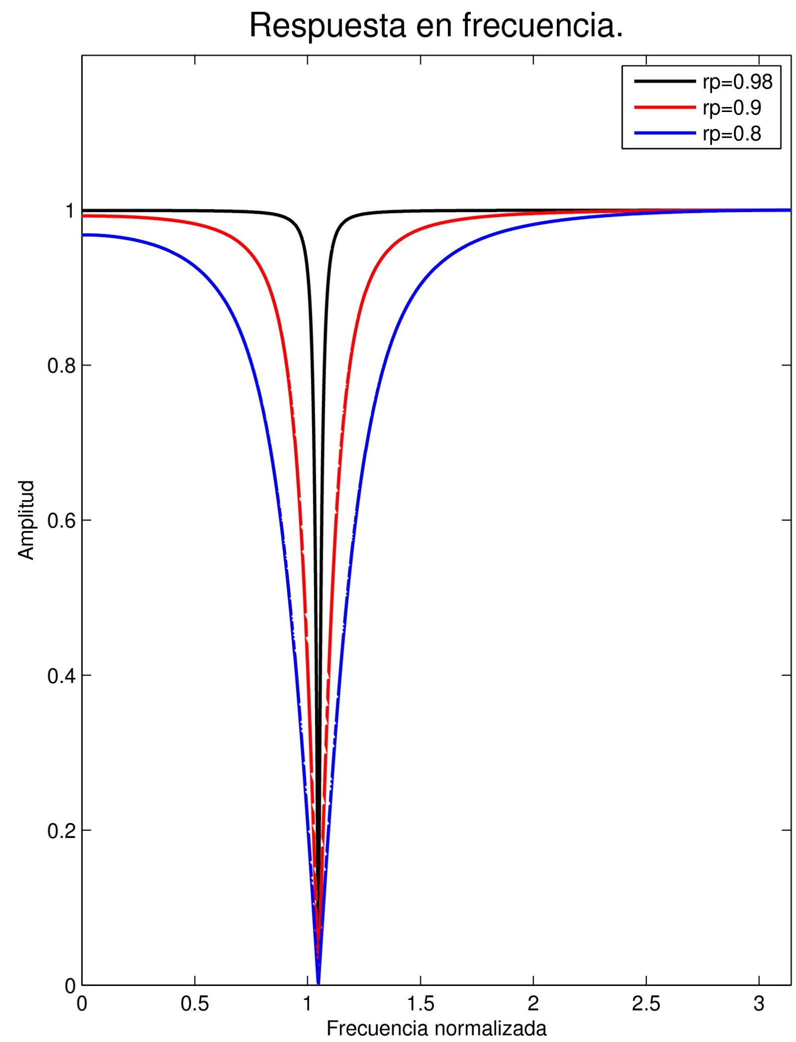
Filtros IIR de segundo orden – Filtros “notch”





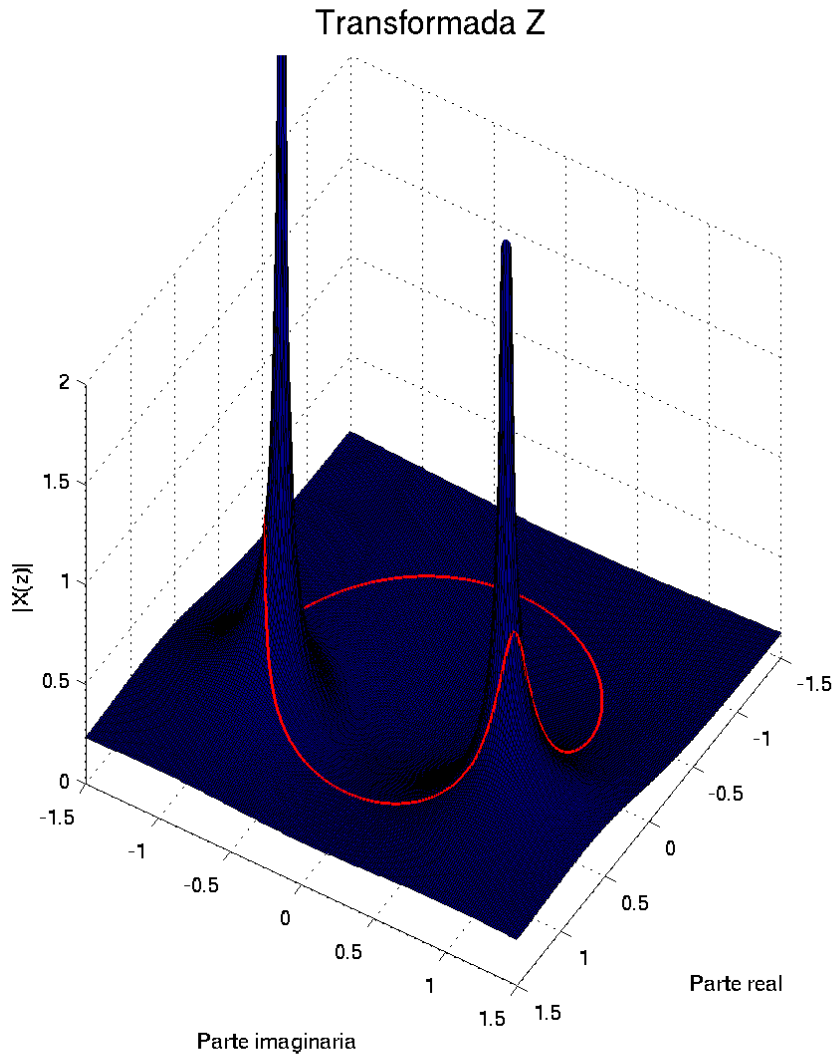
Filtros IIR de segundo orden – Filtros “notch”

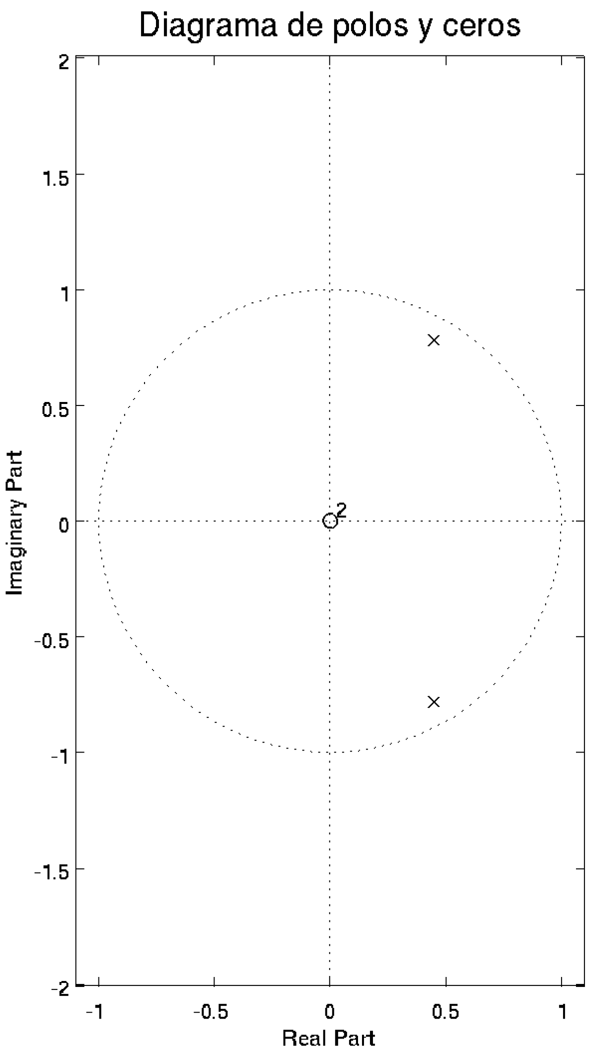




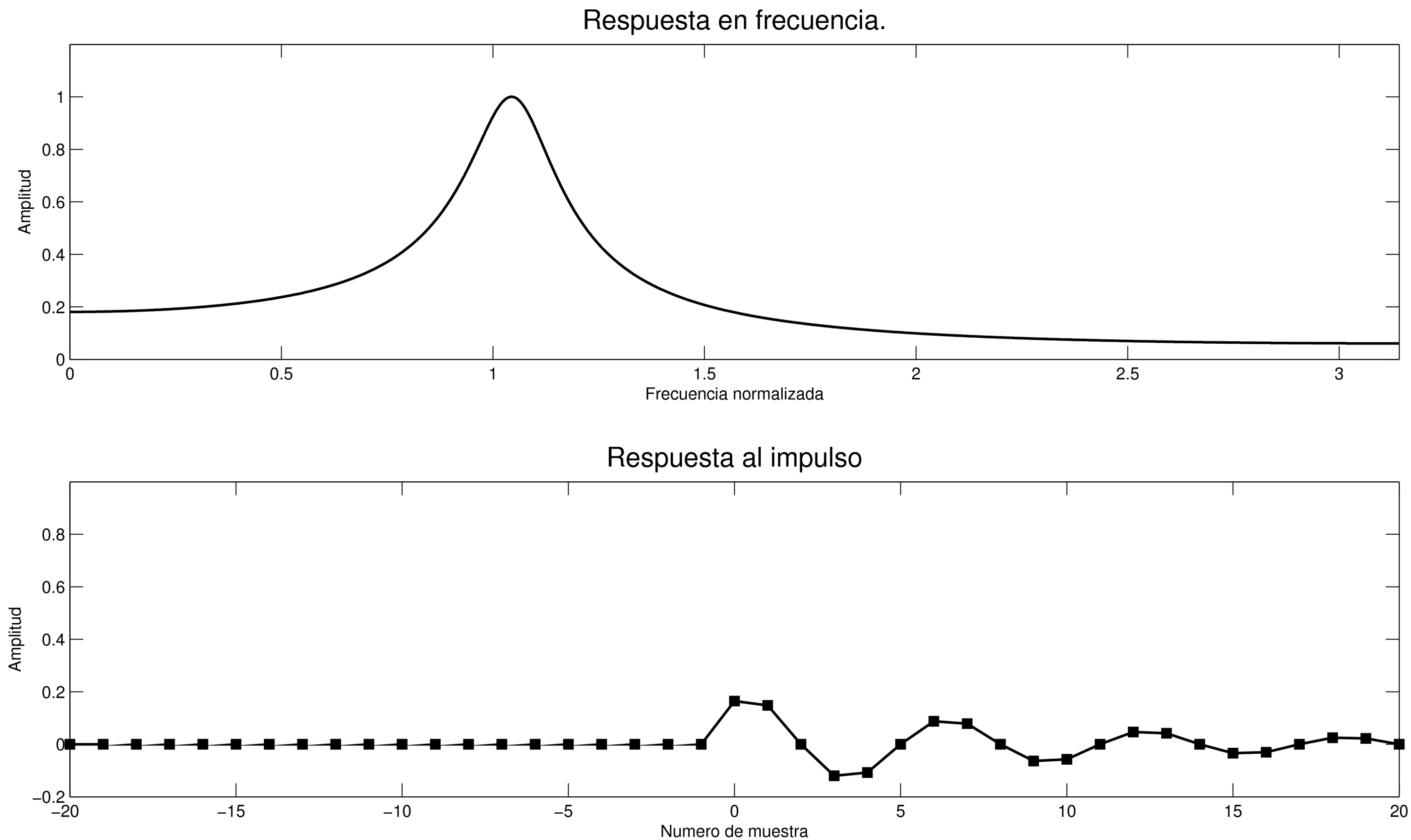
Filtros IIR de segundo orden – Filtros pasabanda

$$r_z = 0$$

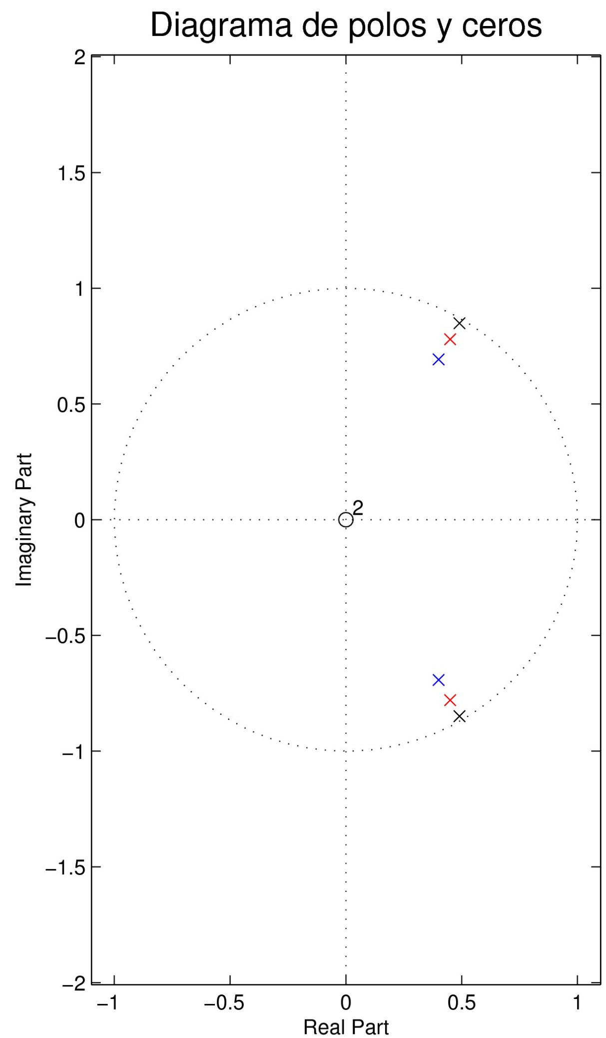


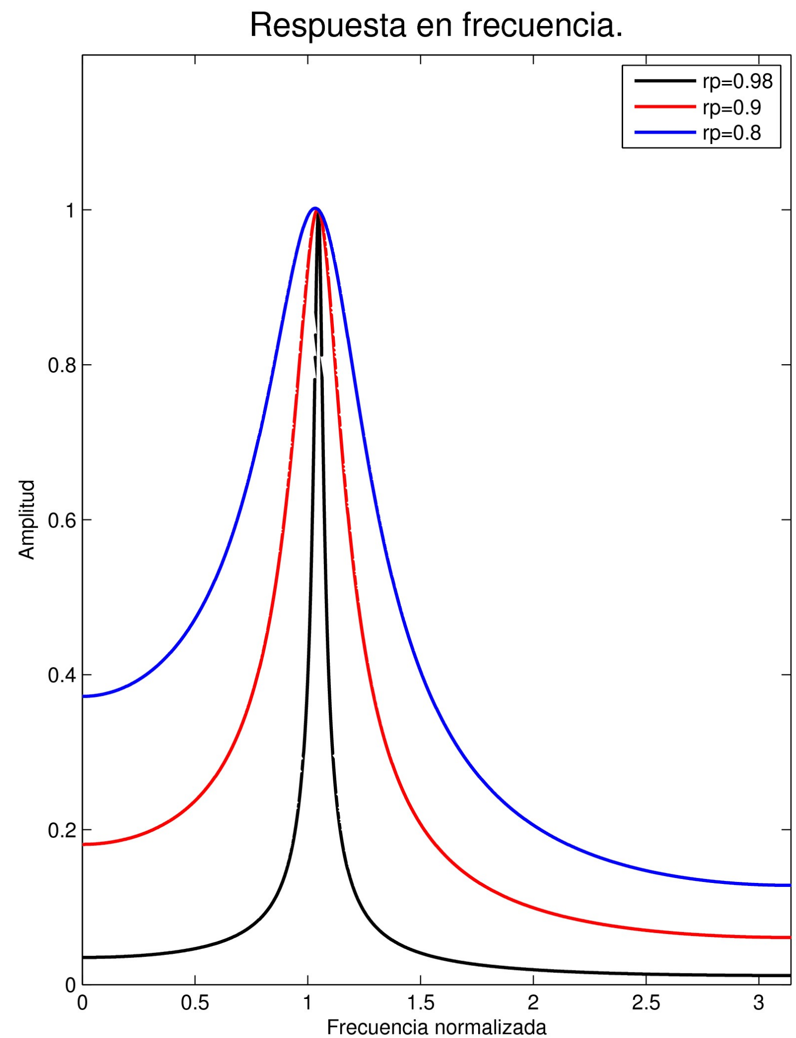


Filtros IIR de segundo orden – Filtros pasabanda



Filtros IIR de segundo orden – Filtros pasabanda





Bibliografía

- Smith, S.W., “*The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing*”, 1997, California Technical Pub.
  - Cap. 33: La Transformada Z (hace analogía con La Transformada de Laplace, Cap. 32)
  - Cap. 19: Filtros recursivos

- Oppenheim, Alan V., “*Discrete-Time Signal Processing*”, Prentice Hall; 2 ed., 1999.
  - Cap. 3: La Transformada Z

- Smith, Julius, “Introduction to Digital Filters with Audio Applications”, 2007, W3K Publishing.
  - Cap. 6: Análisis de la Función de Transferencia